Révision 4 (polynômes)

1. Considérons $P = X^3 - 1$, donner l'expression des trois racines complexes de P. Noter j la racine complexe de P dont la partie imaginaire est strictement positive. Calculer les nombres complexes suivants :
$$1 + j + j^2, \qquad 1 \times j \times j^2, \qquad \bar{j}, \qquad \text{et} \qquad j^{-1}$$
2. Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$ tel que $P(2) = P'(2) = P(\mathrm{i}) = 0$ et $P(3) = 4$. Écrire P sous forme factorisée.
3. Soit $P \in \mathbb{R}_5[X]$ non nul tel que 1 soit racine double, 2 soit racine double et que la somme des racines (comptées avec multiplicité) soit 4. Écrire P sous forme factorisée.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^n + 1$ par $X^3 - 6X^2 + 11X - 6$.
5. Factoriser le polynôme $P = 2X^3 + 26X^2 + 112X + 160$.
On pourra chercher une éventuelle racine double.
6. Décomposer en éléments simples $\dfrac{X^4 - 3}{X^3 - X}$.
Ne pas oublier de d'abord effectuer la division euclidienne du numérateur par le dénominateur.
En déduire $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^4 - 3}{x^3 - x}\,\mathrm{d}x$, ainsi que les dérivées n-ièmes de $x \mapsto \dfrac{x^4 - 3}{x^3 - x}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
7. Démontrer que $\mathscr{B}' = (X^2, (X + 1)X, (X + 1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
8. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(P)$ en fonction de a, b et c avec $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathscr{B}'$ la base de $\mathbb{R}_2[X]$ de la question précédente.
9. Donner une base de l'espace vectoriel $F = \{P \in \mathbb{R}_5[X] \mid P(2) = P'(2) = P(3) = 0\}$.