Révision 3 (sommes)

1. On reconnaît une somme télescopique, ainsi $\sum\limits_{k=2}^{n}(k^4-(k+1)^4) = 2^4-(n+1)^4 = 16-(n+1)^4$.

2. En écrivant le cosinus comme la partie réelle d'une exponentielle, puis la linéarité de la partie réelle puis la formule de Moivre, il vient :

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta+\varphi) = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(k\theta+\varphi)}) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(k\theta+\varphi)}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi}\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}\right)^k\right)$$

Or, la suite $\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi}\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison [1] $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}$. Il y a donc deux cas :

- Si $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}=1$, alors il existe $p\in\mathbb{Z}$ tel que $\theta=2p\pi$ et $\sum\limits_{k=0}^{n}\cos(k\theta+\varphi) = \sum\limits_{k=0}^{n}\cos(\varphi) = (n+1)\cos(\varphi)$
- Si $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}\neq 1$ alors (par la formule de la somme des termes d'une suite géométrique de raison différente de 1) :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta+\varphi) &= \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi}\times\frac{(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta})^{n+1}-1}{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}-1}\right) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi}\times\frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{(n+1)\theta}{2}}}{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}}\times\frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{(n+1)\theta}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{(n+1)\theta}{2}}}{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\left(\varphi+\frac{n\theta}{2}\right)}\times\frac{2\mathrm{i}\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\times\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\left(\varphi+\frac{n\theta}{2}\right)}\right)\\
&= \frac{\cos\left(\varphi+\frac{n\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}
\end{aligned}$$

3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
u_n-u_{n+1} &= \sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=n+1}^{2(n+1)}\frac{1}{k} = \sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=n+1}^{2n+2}\frac{1}{k} = \frac{1}{n}+\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}-\left(\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+1}+\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\right)\\
&= \frac{1}{n}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2} \geqslant \frac{1}{n}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n} = 0
\end{aligned}$$

Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

4. Considérons $X^2+5X+6=(X+2)(X+3)$ polynôme scindé à racines simples, ainsi [2] :

$$\exists!(a,b)\in\mathbb{R}^2 \qquad \frac{1}{X^2+5X+6} = \frac{1}{(X+2)(X+3)} = \frac{a}{X+2}+\frac{b}{X+3}$$

En multipliant par $X+2$ et en remplaçant X vers -2, il vient $a=1$. En multipliant par $X+3$ et en remplaçant X vers -3, il vient $b=-1$. Ainsi, pour $n\in\mathbb{N}^*$, en reconnaissant une somme télescopique :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+5k+6} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right) = \frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}$$

Par conséquent, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3}$.

5. Soit un entier $n\geqslant 2$. En reconnaissant une formule du binôme de Newton [3] :

$$\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}3^{k-2} = \frac{1}{9}\left[\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}3^k\right] = \frac{1}{9}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k1^{n-k}-\binom{n}{0}3^0-\binom{n}{1}3^1\right] = \frac{4^n-1-3n}{9}$$

6. (a)
```python
def Somme(n):
    S = 0
    for k in range(1,n+1):
        S += k**4#ou bien S = S + k**4
    return S
```

   (b) Soit on écrit avec des `assert` et ainsi cela provoquera une erreur si la fonction ne renvoie pas le bon résultat :

---

1. En effet, si on note $(u_n)_n$ cette suite, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi}\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}\right)^{n+1}=\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi}\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}\right)^{n}\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}=\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}u_n$.
2. Oui, oui c'est la même décomposition en éléments simples que dans la feuille de révision sur les fonctions !
3. Au passage, on effectue une somme d'entiers, cela prouve que 9 divise 4^n-1-3n. Intéressant, non ?

```python
assert Somme(0) == 0#somme vide
assert Somme(1) == 1
assert Somme(2) == 17
assert Somme(3) == 17+81
```

Soit on affiche les booléens correspondant, si l'un est à `False` c'est qu'il y a une erreur :

```python
print(Somme(0) == 0)#somme vide
print(Somme(1) == 1)
print(Somme(2) == 17)
print(Somme(3) == 17+81)
```