Révision 4 (polynômes)

1. - Les racines de P sont exactement les nombres complexes z tels que $z^3-1=0$, (les racines cubiques de l'unité [1]). donc sont $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi\times 0}{3}}=1$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi\times 1}{3}}=\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi\times 2}{3}}=\dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$. Ainsi, $j=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.
   - $1+j+j^2=\dfrac{1-j^3}{1-j}=0$ (somme des termes d'une suite géométrique de raison $j\neq 1$, et $j^3=1$) [2].
   - $1\times j\times j^2=j^3=1$,
   - Par 2π-périodicité de $\theta\mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$, $\overline{j}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2\pi/3}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(-2\pi/3+2\pi)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,4\pi/3}=j^2$
   - $j^{-1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}=\overline{j}=j^2$.
2. 2 est racine au moins [3] de multiplicité 2, i est racine et P est un polynôme à coefficients réels, donc $-\mathrm{i}$ est aussi racine. Ainsi, $(X-2)^2(X-\mathrm{i})(X+\mathrm{i})|P$; il existe $Q\in\mathbb{R}[X]$ tel que $P=Q(X-2)^2(X-\mathrm{i})(X+\mathrm{i})$ Mais $d^\circ P\leqslant 4$, donc nécessairement Q est constant. Notons λ cette constante, $P=\lambda(X-2)^2(X^2+1)$. Mais comme $P(3)=4$, nécessairement $4=\lambda\times 1\times 10$. Ainsi, $\lambda=\dfrac{2}{5}$. Donc $P=\dfrac{2}{5}(X-2)^2(X-\mathrm{i})(X+\mathrm{i})$.
3. Comme $d^\circ P\leqslant 5$ et que P est non nul, on en déduit qu'il y a au plus cinq racines comptées avec multiplicité, or, on en en déjà 4 : 1 qui compte double et 2 qui compte double, or $1+1+2+2=6$, il y a donc nécessairement une cinquième racine x telle que $1+1+2+2+x=4$, dès lors, $x=-2$. Donc, $P=\lambda(X-1)^2(X-2)^2(X+2)$ avec $\lambda\in\mathbb{R}^*$.
4. Posons $B=X^3-6X^2+11X-6$. Remarquons [4] que $B(1)=1-6+11-6=0$. Donc $X-1|B$, ainsi $B=(X-1)(X^2-5X+6)=(X-1)(X-2)(X-3)$ Comme $B\neq 0$, effectuons la division euclidienne de X^n+1 par B : il existe $(Q,R)\in\mathbb{R}[X]^2$ tel que $X^n+1=BQ+R$ avec $d^\circ R<d^\circ B=3$. Donc $R\in\mathbb{R}_2[X]$. Ainsi, il existe $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $R=aX^2+bX+c$. Donc :

   $$X^n+1=(X-1)(X-2)(X-3)Q+aX^2+bX+c$$

   En remplaçant successivement [5] X par 1, on obtient : $2=(1-1)(1-2)(1-3)Q(1)+a+b+c=a+b+c$, en remplaçant X par 2, on obtient $2^n+1=(2-1)(2-2)(2-3)Q(2)+4a+2b+c$, en remplaçant X par 3, on obtient $3^n+1=(3-1)(3-2)(3-3)Q(3)+a3^2+b3+c$. Ainsi, on est amené à résoudre le système :

   $$\left\{\begin{array}{rcl} c+b+a&=&2\\ c+2b+4a&=&2^n+1\\ c+3b+9a&=&3^n+1\end{array}\right. \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} c+b+a&=&2\\ b+3a&=&2^n-1\\ 2b+8a&=&3^n-1\end{array}\right. \underset{L_3\leftarrow L_3-2L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} c+b+a&=&2\\ b+3a&=&2^n-1\\ 2a&=&3^n-2^{n+1}+1\end{array}\right.$$

   Ainsi, $R=\dfrac{3^n-2^{n+1}+1}{2}X^2+\left(2^n-1-3\dfrac{3^n-2^{n+1}+1}{2}\right)X+\left(2-\left(2^n-1-3\dfrac{3^n-2^{n+1}+1}{2}\right)-\dfrac{3^n-2^{n+1}+1}{2}\right)$.
5. Si α est une racine double de P, alors $P(\alpha)=P'(\alpha)=0$ et $P''(\alpha)\neq 0$. En particulier, α serait racine de $P'=6X^2+52X+112=2(3X^2+26+56)$. Le discriminant de ce polynôme du second degré est $26^2-4\times 3\times 56=676-672=4$, ainsi les racines sont $\dfrac{-26+2}{6}=-4$ et $\dfrac{-26-2}{6}=\dfrac{-14}{3}$. Or,

   $$P(-4)=2((-4)^3+13\times(-4)^2+56\times(-4)+80)=2\times 16\times(-4+13-14+5)=0$$

   Ainsi, -4 est une racine de multiplicité au moins 2. De plus, la somme des racines de P comptées avec multiplicité vaut $\dfrac{-26}{2}=-13$. Donc, si $x_1=-4$, $x_2=-4$ et x_3 est la dernière racine complexe, on a $x_1+x_2+x_3=-13$, soit $x_3=-5$. Ainsi [6], $P=2(X+4)(X+4)(X+5)$.
6. La division euclidienne de X^4-3 par X^3-X est $X^4-3=X(X^3-X)+X^2-3$, Ainsi, $\dfrac{X^4-3}{X^3-X}=X+\dfrac{X^2-3}{X(X-1)(X+1)}$. Le dénominateur étant scindé à racines simples, il existe $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que

   $$\frac{X^2-3}{X(X-1)(X+1)}=\frac{a}{X}+\frac{b}{X-1}+\frac{c}{X+1}$$

   - En multipliant par X puis en remplaçant X par 0, on obtient $a=3$.
   - En multipliant par $X-1$ puis en remplaçant X pars 1, on obtient $b=-1$.

1. Les racines n-ième sont donc à réviser.
2. Sinon, comme on sait que 1, j et j^2 sont racines de P, on connaît directement leur somme et leur produit.
3. Si $P(2)=P'(2)=0$ cela ne veut pas dire que la multiplicité vaut exactement 2, pour cela il faudrait aussi que $P''(2)\neq 0$.
4. Rappel si on ne sait pas trouver des racines d'un polynôme, on peut toujours commencer par chercher au brouillon des racines évidentes : 0,1,2,3,-1,-2,-3.
5. Ne pas oublier de remplacer X par 1 **partout** y compris dans Q et donc écrire $Q(1)$ et non juste Q.
6. Ne pas oublier le coefficient dominant en facteur.

- En multipliant par $X+1$, puis en remplaçant X vers -1, on obtient $c=-1$.
$$\frac{X^2-3}{X(X-1)(X+1)}=\frac{3}{X}+\frac{-1}{X-1}+\frac{-1}{X+1}\quad\text{donc}\quad\frac{X^4-3}{X^3-X}=X+\frac{3}{X}+\frac{-1}{X-1}+\frac{-1}{X+1}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\int_2^3\frac{x^4-3}{x^3-x}\,dx &= \int_2^3 x+\frac{3}{x}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\,dx=\left[\frac{x^2}{2}+3\ln(x)-\ln(x-1)-\ln(x+1)\right]_2^3\\ &= \frac{9}{2}+3\ln(3)-\ln(2)-\ln(4)-\frac{4}{2}-3\ln(2)+\ln(1)+\ln(3)=\frac{5}{2}+\ln\left(\frac{81}{64}\right)\end{aligned}$$

Pour $x\in\mathbb{R}\backslash\{-1;0;1\}$, posons $f(x)=x+\frac{3}{x}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$, alors f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;0;1\}$ (comme somme d'inverses de polynômes qui ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;0;1\}$), de plus :

$$f^{(0)}\colon x\mapsto x+\frac{3}{x}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\qquad f^{(1)}\colon x\mapsto 1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x+1)^2}$$
$$f^{(2)}\colon x\mapsto 0+\frac{3\times 2}{x^3}-\frac{2}{(x-1)^3}-\frac{2}{(x+1)^3}\qquad f^{(3)}\colon x\mapsto -\frac{3\times 6}{x^4}+\frac{6}{(x-1)^4}+\frac{6}{(x-1)^4}$$

On conjecture, alors, que pour tout entier $n\geqslant 2$, $\mathscr{P}(n)$:« $f^{(n)}\colon x\mapsto n!(-1)^n\left(\frac{3}{x^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right)$ ».

- $\mathscr{P}(2)$ est vraie par calcul[7].
- Soit un entier $n\geqslant 2$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Alors, on dérive $f^{(n)}$ comme une somme de fonctions dérivables :
$$(f^{(n)})'\colon x\mapsto n!(-1)^n\left(\frac{-3\times(n+1)}{x^{n+2}}+\frac{n+1}{(x-1)^{n+2}}+\frac{n+1}{(x+1)^{n+2}}\right)$$
$$f^{(n+1)}\colon x\mapsto (n+1)!(-1)^{n+1}\left(\frac{3}{x^{n+2}}-\frac{1}{(x-1)^{n+2}}-\frac{1}{(x+1)^{n+2}}\right)$$
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- Par récurrence, pour tout entier $n\geqslant 2$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

7. Soit $P\in\mathbb{R}_2[X]$ et $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, alors :
$$\begin{aligned}P=xX^2+y(X+1)X+z(X+1)^2=(x+y+z)X^2+(y+2z)X+z &\iff \begin{cases}x+y+z&=a\\ y+2z&=b\\ z&=c\end{cases}\\ &\iff\begin{cases}z&=c\\ y&=b-2c\\ x&=a-b+c\end{cases}\end{aligned}$$
(la première équivalence est dû au fait qu'un polynôme a une unique décomposition dans la base $\mathscr{B}$). Ainsi, on a montré que tout P, vecteur de $\mathbb{R}_2[X]$, s'écrivait comme une unique combinaison linéaire dans la famille $\mathscr{B}'$ (famille de vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$), ainsi $\mathscr{B}'$ est une base[8] de $\mathbb{R}_2[X]$.

8. Par définition, $P=c\cdot 1+b\cdot X+a\cdot X^2$, donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P)=\begin{pmatrix}c\\b\\a\end{pmatrix}$ et d'après la question précédente, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(P)=\begin{pmatrix}a-b+c\\b-2c\\c\end{pmatrix}$

9. Soit $P\in\mathbb{R}_5[X]$.
$$\begin{aligned}P\in F &\iff P(2)=P'(2)=P(3)=0 \iff (X-2)^2(X-3)|P\iff \exists Q\in\mathbb{R}_2[X]\quad P=(X-2)^2(X-3)Q\\ &\iff \exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\quad P=(X-2)^2(X-3)(aX^2+bX+c)\\ &\iff \exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\quad P=aX^2(X-2)^2(X-3)+bX(X-2)^2(X-3)+c(X-2)^2(X-3)\\ &\iff P\in\mathrm{vect}(X^2(X-2)^2(X-3),X(X-2)^2(X-3),(X-2)^2(X-3))\end{aligned}$$
Posons alors $\mathscr{B}=(X^2(X-2)^2(X-3),X(X-2)^2(X-3),(X-2)^2(X-3))$, ainsi, $F=\mathrm{vect}(\mathscr{B})$ et $\mathscr{B}$ est une famille génératrice de F. De plus, cette famille est constituée de polynômes non nuls dont les degrés sont deux à deux distincts, ainsi $\mathscr{B}$ est libre. Dès lors, $\mathscr{B}$ est une base de F.

7. Attention, nous sommes obligés de faire démarrer l'hypothèse de récurrence au rang 2, en effet, dans $f^{(0)}$ et $f^{(1)}$ il y a un terme en plus.
8. Attention, c'est une famille dont les polynômes ont même degré mais elle est quand même libre.