Révision 5 (systèmes linéaires, matrices, espaces vectoriels)

1. La base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est : $\mathscr{B} =$
   Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Complétez : $\dim(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})) =$ $\quad \dim(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})) =$ $\quad \dim(\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})) =$ $\quad \dim(\mathscr{M}_{n}(\mathbb{K})) =$
2. Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Indiquer si les produits matriciels suivants sont possibles ou non et effectuer-les si c'est possible : $A \times A$, $\quad A \times B$, $\quad B \times A$, $\quad B \times B$, $\quad A^\top \times B$, $\quad A^\top \times A$
3. Si $E_{i,j} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ $E_{k,\ell} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ (matrices élémentaires) alors $E_{i,j} \times E_{k,\ell} \in$ $\qquad$ et $E_{i,j} \times E_{k,\ell} =$
4. Inverser (si c'est possible) la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$.
   On n'utilisera ni les systèmes linéaires ni les opérations sur les lignes/colonnes.
5. Inverser (si c'est possible) la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ par les deux méthodes : en résolvant le système linéaire puis en effectuant les opérations sur les lignes.
   Assurez-vous d'avoir les mêmes résultats.
6. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Démontrer que $A^2 \in \mathrm{vect}(A, I_3)$, puis en déduire (sans calcul) que A est inversible et déterminer son inverse.
7. Soit $T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ calculer T^n en explicitant les quatre coefficients de T^n sans somme.
8. Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ x & z & z & t \\ t & x & y & t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,4}(\mathbb{R}) \mid \begin{cases} x + y + 2z + t & = 0 \\ 3x + 5y - t & = 0 \\ 2x + 3y + z - t & = 0 \end{cases} \right\}$. À l'aide d'une famille génératrice, démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ et trouver une base de F.
9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathscr{T}_n$ le SEV de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ constituée des matrices triangulaires supérieures et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ le SEV de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ constituée des matrices antisymétriques, démontrer que $\mathscr{T}_n$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires.
10. Vrai ou faux ? E est un espace vectoriel de dimension finie n et $\mathscr{F}$ une famille finie de vecteurs. Donner un contre-exemple si c'est faux.
    (a) Si $\mathscr{F}$ est une base de E, alors $\dim(\mathscr{F}) = \dim(E)$.
    (b) Si $\mathscr{F}$ est une base de E, alors $|\mathscr{F}| = \dim(E)$.
    (c) Si $\mathscr{F}$ est une base de E, alors $|\mathscr{F}| = |E|$.
    (d) Si $|\mathscr{F}| = n$ alors $\mathscr{F}$ est une base de E.
    (e) Si $|\mathscr{F}| = n$ et $\mathscr{F}$ est libre, alors $\mathscr{F}$ est une base de E.
    (f) Si $|\mathscr{F}| = n$ et $\mathscr{F}$ est une famille génératrice, alors $\mathscr{F}$ est une base de E.
    (g) Si $\mathscr{F}$ est libre, alors $|\mathscr{F}| \leqslant n$.
    (h) Si $|\mathscr{F}| \leqslant n$, alors $\mathscr{F}$ est libre.
    (i) Si $\mathscr{F}$ ne contient pas le vecteur nul, alors $\mathscr{F}$ est libre.
    (j) Si $\mathscr{F}$ est libre, alors $\mathscr{F}$ ne contient pas le vecteur nul.
    (k) Si les vecteurs de $\mathscr{F}$ sont deux à deux non colinéraires, alors $\mathscr{F}$ est libre.
    (l) Si $\mathscr{F}$ est libre, alors les vecteurs de $\mathscr{F}$ sont deux à deux non colinéaires.
    (m) E et (0_E) sont des familles libres de E.
    (n) $\dim(\{0_E\}) = 1$.
    (o) Si $x \in E$, $\dim(\mathrm{vect}(x)) = 1$.
    (p) Si $(x,y) \in E^2$, $\dim(\mathrm{vect}(x,y)) = 2$.
    (q) $\mathscr{F}$ est libre ssi $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = n$.
    (r) Si $\mathscr{F}$ est une famille de polynômes dont les degrés sont deux à deux différents, alors $\mathscr{F}$ est libre.
    (s) Si $|\mathscr{F}| > n$, alors la famille est liée.
    (t) Si $\mathscr{F}$ est liée, alors $|\mathscr{F}| > n$.
    (u) Si $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E, alors $|\mathscr{F}| \geqslant n$.
    (v) Si $|\mathscr{F}| \geqslant n$, alors $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E.
    (w) Si $\mathscr{F} = ((1,1,2),(3,3,3),(2,2,1))$ (famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$), alors $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = 2$.
    (x) Si F est un SEV de E, alors $F + F = F$ et $F + E = E$.
    (y) Si F et G sont deux SEV de E, alors $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G)$.
    (z) Si F et G sont deux SEV de E tels que $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$, alors F et G sont supplémentaires.