Révision 5 (systèmes linéaires, matrices, espaces vectoriels)

1. La base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est $\mathscr{B} = (E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$. où $E_{a,b} = (\delta_{i,a}\delta_{j,b})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ pour $a \in [\![1\,;n]\!]$ et $b \in [\![1\,;p]\!]$.
   $\dim(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$ $\quad$ $\dim(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})) = n$ $\quad$ $\dim(\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})) = p$ $\quad$ $\dim(\mathscr{M}_{n}(\mathbb{K})) = n^2$

2. Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.
   - $A \times A$ est impossible (le nombre de colonnes de A n'est pas égale au nombre de lignes de A).
   - $A \times B$ est possible (le nombre de colonnes de A est égale au nombre de lignes de B).
   - $B \times A$ est possible (le nombre de colonnes de B est égale au nombre de lignes de A).
   - $B \times B$ est impossible (le nombre de colonnes de B n'est pas égale au nombre de lignes de B).
   - $A^T \times B$ est impossible (le nombre de colonnes de A^T n'est pas égale au nombre de ligne de B)
   - $A^T \times A$ est possible (le nombre de colonnes de A^T est égale au nombre de ligne de A).

   $$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^TA = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$$

3. Si $E_{i,j} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ $E_{k,\ell} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ (matrices élémentaires) alors $E_{i,j} \times E_{k,\ell} \in \mathscr{M}_{n,\ell}(\mathbb{K})$ et $E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$

4. $\det(A) = -1 \times 12 - (-3) \times (-4) = -24 \neq 0$. Ainsi, A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{-24}\begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{24} \end{pmatrix}$

5. - Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, alors :

$$Y = BX \iff \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ -x+2y+3z \\ y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+2y+3z & = & a \\ -x+2y+3z & = & b \\ y+z & = & c \end{array}\right.$$

$$\underset{L_2\leftarrow L_2+L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} x+2y+3z & = & a \\ 4y+6z & = & a+b \\ y+z & = & c \end{array}\right. \underset{L_2\leftrightarrow L_3}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} x+2y+3z & = & a \\ y+z & = & c \\ 4y+6z & = & a+b \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3-4L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} x+2y+3z & = & a \\ y+z & = & c \\ 2z & = & a+b-4c \end{array}\right. \underset{L_1\leftarrow L_1-2L2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} x \quad +z & = & a-2c \\ y+z & = & c \\ 2z & = & a+b-4c \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{a}{2}-\frac{b}{2} \\ y & = & -\frac{a}{2}-\frac{b}{2}+3c \\ z & = & \frac{a}{2}+\frac{b}{2}-2c \end{array}\right. \iff X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} Y$$

   Ainsi, B est inversible et $B^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

- $$\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&2&3\\0&1&1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&6\\0&1&1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&4&6\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

$$\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2\\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&1\\1&1&-4\end{pmatrix}$$

$$\substack{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_3\\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&3\\1&1&-4\end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&3\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-2\end{pmatrix}$$

Ainsi, B est inversible et $B^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&3\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-2\end{pmatrix}$.

6. $A^2 = \begin{pmatrix}6&5&5\\5&6&5\\5&5&6\end{pmatrix} = 5A - 4I_3 \in \mathrm{vect}(A, I_3)$. Dès lors $A^2 - 5A = -4I_3$. ainsi, $A(A - 5I_3) = -4I_3$ et donc $A \times \left(\frac{5}{4}I_3 - \frac{1}{4}A\right) = I_3$. De même $(A - 5I_3)A = -4I_3$ et donc $\left(\frac{5}{4}I_3 - \frac{1}{4}A\right) \times A = I_3$. Ceci prouve que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{5}{4}I_3 - \frac{1}{4}A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}$.

7. Remarquons que $T = 3I_2 + 2E_{1,2}$, de plus, $(E_{1,2})^2 = 0_2$, en outre, $(3I_2) \times (2E_{1,2}) = 6E_{1,2} = (2E_{1,2}) \times (3I_2)$, on peut ainsi appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} T^n &= (3I_2 + 2E_{1,2})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2E_{1,2})^k \times (3I_2)^{n-k} = \binom{n}{0} \times I_2 \times (3I_2)^n + \binom{n}{1} \times (2E_{1,2}) \times (3I_2)^{n-1} + 0_2 \\ &= 3^n I_2 + 2n3^{n-1}E_{1,2} = \begin{pmatrix}3^n & 2n3^{n-1}\\0&3^n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

8. $F = \left\{ \begin{pmatrix}x&y&z&t\\x&z&z&t\\t&x&y&t\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,4}(\mathbb{R}) \mid \left\{\begin{array}{rcl} x+y+2z+t &=& 0\\ 3x+5y-t &=& 0\\ 2x+3y+z-t &=& 0\end{array}\right. \right\}$. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, résolvons le système li-

néaire :

$$\begin{cases} x+y+2z+t &= 0\\ 3x+5y-t &= 0\\ 2x+3y+z-t &= 0\end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-3L_1\\ L_3\leftarrow L_3-2L_1}}{\iff} \begin{cases} x+y+2z+t &= 0\\ 2y-6z-4t &= 0\\ y-3z-3t &= 0\end{cases}$$
$$\underset{L_2\leftarrow L_3}{\iff} \begin{cases} x+y+2z+t &= 0\\ y-3z-3t &= 0\\ 2y-6z-4t &= 0\end{cases}$$
$$\underset{\substack{L_1\leftarrow L_1-L_2\\ L_3\leftarrow L_3-2L_1}}{\iff} \begin{cases} x+\ 5z+4t &= 0\\ y-3z-3t &= 0\\ 2t &= 0\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x &= -5z\\ y &= 3z\\ t &= 0\end{cases}$$

Ainsi,

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} -5z & 3z & z & 0\\ -5z & z & z & 0\\ 0 & -5z & 3z & 0\end{pmatrix} \mid z\in\mathbb{R}\right\}$$

Posons alors $M = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 0\\ -5 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -5 & 3 & 0\end{pmatrix}$, on a ainsi montré que $F = \{zM \mid z\in\mathbb{R}\} = \mathrm{vect}(M)$, ainsi F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ et (M) est une famille génératrice de F. De plus, (M) est une famille d'un seul vecteur et ce vecteur est non nul, donc (M) est une famille libre. Dès lors, (M) est une base de F.

9. Soit $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrons, par analyse synthèse, qu'il existe un unique couple $(T,A)\in\mathscr{T}_n\times\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ tel que $M=T+A$.
   - **Analyse** : supposons qu'il existe $(T,A)\in\mathscr{T}_n\times\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ tel que $M=T+A$. Soit $(i,j)\in[\![1\,;n]\!]^2$, $M_{i,j}=T_{i,j}+A_{i,j}$. Distinguons les cas :
     — Si $i=j$, alors[1] $A_{i,i}=0$, ainsi, $T_{i,i}=M_{i,i}$.
     — Si $i>j$, alors $T_{i,j}=0$ donc $A_{i,j}=M_{i,j}$.
     — Si $i<j$, alors $A_{i,j}=-A_{j,i}=-M_{j,i}$. De plus, $M_{i,j}=T_{i,j}-M_{j,i}$ donc $T_{i,j}=M_{i,j}+M_{j,i}$.
     On a ainsi, montré que s'il existait $(T,A)\in\mathscr{T}_n\times\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ tel que $M=T+A$, alors leurs coefficients étaient complètement déterminés par ceux de M d'une unique façon.
   - **Synthèse** : pour $(i,j)\in[\![1\,;n]\!]^2$, posons
     — $T_{i,i}=M_{i,i}$, $A_{i,i}=0$,
     — Si $i>j$, $T_{i,j}=0$ et $A_{i,j}=M_{i,j}$
     — Si $i<j$, $T_{i,j}=M_{i,j}+M_{j,i}$ et $A_{i,j}=-A_{j,i}=M_{j,i}$
     Alors, $T=(T_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}\in\mathscr{T}_n$, $A=(A_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}\in\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $(i,j)\in[\![1\,;n]\!]^2$ on a :
     — Si $i=j$, $T_{i,i}+A_{i,i}=M_{i,i}+0=M_{i,i}$.
     — Si $i>j$, $T_{i,j}+A_{i,j}=0+M_{i,j}=M_{i,j}$.
     — Si $i<j$, $T_{i,j}+A_{i,j}=M_{i,j}+M_{j,i}-M_{j,i}=M_{i,j}$.
     Ainsi, $M=T+A$, avec $T\in\mathscr{T}_n$ et $A\in\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

   Ainsi, la synthèse a montré l'existence de $T\in\mathscr{T}_n$ et de $A\in\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ telles que $M=T+A$, l'analyse a montré l'unicité d'une telle décomposition. Ainsi, $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})=\mathscr{T}_n\oplus\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

10. (a) **Faux !** Si $\mathscr{F}$ est une base $\mathscr{F}$ n'est pas un espace vectoriel, donc $\dim(\mathscr{F})$ n'a pas de sens.
    (b) **Vrai !** C'est la définition de la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie.
    (c) **Faux !** Si $\mathscr{F}$ est une base de E, alors $|\mathscr{F}|=\dim(E)$. Si E est un espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$, alors E est un ensemble infini et $|E|$ n'a donc pas de sens (car E est un ensemble infini).
    (d) **Faux !** Si $E=\mathbb{R}^2$, $\mathscr{F}=((1,2),(2,4))$ mais $\mathscr{F}$ est une famille liée (deux vecteurs colinéaires) et donc $\mathscr{F}$ n'est pas une base de E bien que $|\mathscr{F}|=2=\dim(\mathbb{R}^2)$.
    (e) **Vrai !** C'est une propriété du cours qui permet souvent de ne pas démontrer le caractère génératrice.
    (f) **Vrai !** C'est une propriété du cours.
    (g) **Vrai !** Le cardinal d'une famille libre est inférieur ou égale au cardinal d'une base et donc à la dimension de l'espace.
    (h) **Faux !** Si $E=\mathbb{R}^2$, $\mathscr{F}=((1,2),(2,4))$ mais $\mathscr{F}$ est une famille liée (deux vecteurs colinéaires) et donc $\mathscr{F}$ n'est pas libre bien que $|\mathscr{F}|\leqslant 2=\dim(\mathbb{R}^2)$.
    (i) **Faux !** Si $E=\mathbb{R}^2$, $\mathscr{F}=((1,2),(2,4))$ mais $\mathscr{F}$ est une famille liée (deux vecteurs colinéaires) et donc $\mathscr{F}$ n'est pas libre bien qu'elle ne contienne pas le vecteur nul.

1. En effet, $A_{i,i}=-A_{i,i}$ donc $2A_{i,i}=0$ et donc $A_{i,i}=0$.

(j) **Vrai !** Si $\mathscr{F}$ contenait le vecteur nul, alors elle serait liée. Par contraposée, on a le résultat.

(k) **Faux !** Si $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathscr{F} = ((1,0,0),(0,1,0),(2,1,0))$ alors les vecteurs de $\mathscr{F}$ sont deux à deux non colinéaires, mais $\mathscr{F}$ n'est pas libre, en effet, $(2,1,0) = 2 \times (1,0,0) + 1 \times (0,1,0)$.

(l) **Vrai !** Si l'un des vecteurs de $\mathscr{F}$ est colinéaire à un autre vecteur, alors l'un des vecteurs s'exprime comme combinaison linéaires des autres et donc $\mathscr{F}$ est liée. Par contraposée, on a le résultat.

(m) **Faux !** Les deux contiennent le vecteur nul donc ne peuvent être libre. De plus, E est un ensemble infini (sauf si $E = \{0_E\}$) et seuls les familles finies peuvent être libre suivant le programme de PCSI.

(n) **Faux !** $\dim(\{0_E\}) = 0$.

(o) **Faux !** Si $x = 0_E$, $\dim(\text{vect}(x)) = \dim(\{0_E\}) = 0$.

(p) **Faux !** Si $y = 2x$ et $x \neq 0_E$, alors $\dim(\text{vect}(x,y)) = \dim(\text{vect}(x)) = 1$

(q) **Faux !** Si $E = \mathbb{R}^2$, et $\mathscr{F} = ((1,0),(0,1),(1,1))$, alors $\text{rg}(\mathscr{F}) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$, pourtant la famille $\mathscr{F}$ est liée.

(r) **Faux !** Si $\mathscr{F} = (0, X, X^3, X^2)$ alors $\mathscr{F}$ est liée bien que les degrés des polynômes soient deux à deux distincts.

(s) **Vrai !** Si $\mathscr{F}$ était libre alors $|\mathscr{F}| \leqslant n$, par contraposée, on a le résultat.

(t) **Faux !** Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\mathscr{F} = ((1,1,1),(2,2,2))$ est liée tandis que $|\mathscr{F}| = 2 \leqslant 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

(u) **Vrai !** Si $\mathscr{F}$ est une famille génératrice, alors, d'après le cours $|\mathscr{B}| = \dim(E) \leqslant |\mathscr{F}|$.

(v) **Faux !** Si $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathscr{F} = ((1,1,1),(2,2,2),(3,3,3),(-7,-7,7))$, alors $\text{vect}(\mathscr{F}) = \{(\lambda,\lambda,\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \neq E$, ainsi $|\mathscr{F}| = 4 \geqslant \dim(E) = 3$ mais $\mathscr{F}$ n'est pas génératrice.

(w) **Vrai !** Comme $(3,3,3) = (1,1,2) + (2,2,1)$, $\text{rg}(\mathscr{F}) = \text{rg}((1,1,2),(2,2,1))$, mais $((1,1,2),(2,2,1))$ est une famille libre (deux vecteurs qui sont non colinéaires), ainsi $\text{rg}(\mathscr{F}) = \text{rg}((1,1,2),(2,2,1)) = 2$.

(x) **Vrai !**
- Soit $x \in F + F$, alors il existe $f \in F$ et $\tilde{f}$ tel que $x = f + \tilde{f} \in F$ (car F SEV de E), ainsi $F + F \subset F$. D'autre part, soit $x \in F$, alors $x = 0_E + f \in F + F$, donc $F \subset F + F$, donc $F = F + F$.
- Soit $x \in F + E$, alors il existe $f \in F$ et $e \in E$ tel que $x = f + e$, mais $f \in E$ et $e \in E$ et E est un espace vectoriel, donc $x \in E$, donc $F + E \subset E$. D'autre part, soit $x \in E$, alors $x = 0_E + x$ avec $0_E \in F$, donc $x \in F + E$. Donc $E \subset F + E$. Par conséquent, $E = F + E$.

(y) **Faux !** Si $E = \mathbb{R}^2$ et $F = G = \text{vect}((1,1))$, alors $F + G = F + F = F$ (par ce qui précède), ainsi $\dim(F + G) = \dim(F) = 1$ tandis que $\dim(F) + \dim(G) = 1 + 1 = 2 \neq 1$.

(z) **Faux !** Toujours avec $E = \mathbb{R}^2$ et $F = G = \text{vect}((1,1))$, alors $\dim(E) = 2 = \dim(F) + \dim(G)$ mais F et G ne sont pas supplémentaires, car $(1,1) \in F \cap G$.