Un Café Cours !

1. Soit $f\colon [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ continue sur $[\,a\,;b\,]$. Si $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$ ou $f(b) \leqslant y \leqslant f(a)$, alors il existe $c \in [\,a\,;b\,]$ tel que $y = f(c)$
2. Soit $f\colon [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ continue sur $[\,a\,;b\,]$. Alors il existe $(c,d) \in [\,a\,;b\,]^2$ tel que pour tout $x \in [\,a\,;b\,]$, $f(c) \leqslant f(x) \leqslant f(d)$.
3. Soit $f\colon [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ continue sur $[\,a\,;b\,]$ et dérivable sur $]\,a\,;b\,[$, alors il existe $c \in\,]\,a\,;b\,[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
4. On dit que $\mathscr{L}$ est libre si
$$\forall\,(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n \qquad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = 0_E \quad\Longrightarrow\quad \forall i \in [\![\,1\,;n\,]\!] \quad \lambda_i = 0$$
5. $\mathrm{vect}\,(e_1,e_2,\dots,e_n) = \left\{ \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \mid (\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}$
6. $F+G = \{f+g \mid f \in F \text{ et } g \in G\}$

Exercice : Ne faites pas trop de plans dans la quatrième dimension !

On pose $E = \mathbb{R}^4$ et on définit
$$F = \mathrm{vect}((1,2,0,0),(0,1,1,1))$$
$$G = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+2y+z+t = 0 \text{ et } x+3y+z-t = 0\right\}$$

1. $\mathscr{B}_F = ((1,2,0,0),(0,1,1,1))$ est une famille génératrice de F, de plus cette famille est libre (famille de deux vecteurs non colinéaires), ainsi $\mathscr{B}$ est une base de F et $\dim(F) = |\mathscr{B}_F| = 2$.
2. Proposons deux méthodes (sachant que la première nous avance pour la suite) :
   - Soit $p = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, alors :
$$\begin{aligned} p \in G &\iff \begin{cases} x & +2y & +z & +t & = 0 \\ x & +3y & +z & -t & = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} x & +2y & +z & +t & = 0 \\ & y & & -2t & = 0 \end{cases} \\ &\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\iff} \begin{cases} x & & +z & +5t & = 0 \\ & y & & -2t & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = & -5t-z \\ y & = & 2t \end{cases} \\ &\iff p = (-5t-z, 2t, z, t) \iff p = t(-5,2,0,1) + z(-1,0,1,0) \\ &\iff p \in \mathrm{vect}((-5,2,0,1),(-1,0,1,0)) \end{aligned}$$
     Par double inclusion, $G = \mathrm{vect}((-5,2,0,1),(-1,0,1,0))$, ainsi, G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$
   - — $G \subset \mathbb{R}^4$
     — Comme $0+2\times 0+0+0 = 0+3\times 0+0-0 = 0$, $(0,0,0,0) \in G$
     — Soit $u = (x,y,z,t) \in G$, $v = (x',y',z',t') \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda u + v = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z', \lambda t + t')$ alors :
$$(\lambda x + x') + 2(\lambda y + y') + (\lambda z + z') + (\lambda t + t') = \lambda(x+2y+z+t) + (x'+2y'+z'+t') = \lambda \times 0 + 0 = 0$$
     De même, $(\lambda x + x') + 3(\lambda y + y') + (\lambda z + z') - (\lambda t + t') = 0$ Ainsi, $\lambda u + v \in G$

     Ainsi, par définition d'un sous-espace vectoriel, G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
3. La question précédente montre que $\mathscr{B}_G = ((-5,2,0,1),(-1,0,1,0))$ est une famille génératrice de G. Comme c'est une famille de deux vecteurs non colinéaires, c'est aussi une famille libre. Ainsi, $\mathscr{B}_G$ est une base de G et $\dim(G) = |\mathscr{B}_G| = 2$.
4. Soit $p \in F \cap G$. Ainsi, $p \in F$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $p = a(1,2,0,0) + b(0,1,1,1) = (a, 2a+b, b, b)$. Comme $p \in G$, on a $a + 2(2a+b) + b + b = 0$ et $a + 3(2a+b) + b - b = 0$, on obtient donc le système suivant que l'on résout :
$$\begin{cases} 5a+4b & = 0 \\ 7a+3b & = 0 \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} \begin{cases} -2a+b & = 0 \\ 7a+3b & = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1}{\iff} \begin{cases} -2a+b & = 0 \\ 13a & = 0 \end{cases}$$

Donc $a = b = 0$ puis $p = 0_{\mathbb{R}^4}$. Ainsi, $F \oplus G$, de plus, $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 2 = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$. Ainsi, F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

5. $((1, 2, 0, 0), (0, 1, 1, 1), (-5, 2, 0, 1), (-1, 0, 1, 0))$ est une base adaptée à $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$

Exercice : Expliciter la limite d'une suite implicite

On fixe a un réel strictement positif. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $f_n \colon x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} x^k - a$

1.
```python
def fn(n,x,a):
    S = -a
    for k in range(1,n+1):
        S = S + x**k
    return S
```

2. On remarque que pour un entier $n \geqslant 2$ et x un réel, $f_n(x) = f_{n-1}(x) + x^n$

```python
def fn(n,x,a):
    if n == 1:
        return x - a
    return fn(n-1,x,a) + x**n
```

3. Tout d'abord $f_n(0) = -a \leqslant 0$ tandis que $f_n(a) = \sum\limits_{k=1}^{n} a^k - a = \sum\limits_{k=2}^{n} a^k \geqslant 0$ (par somme de termes positifs). Ainsi, $f_n(0) \leqslant 0 \leqslant f_n(a)$ et f_n est continue sur $[\,0\,;a\,]$ car polynomiale. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in [\,0\,;a\,]$ tel que $f_n(x) = 0$. De plus, f_n est dérivable (car polynomiale) et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f_n'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} kx^{k-1} > 0$ par somme de termes positifs ou nuls dont l'un est strictement positif (pour $k = 1$ le terme de la somme vaut 1), ainsi, f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc injective. Ainsi, 0 ne peut avoir un autre antécédent par f_n dans $\mathbb{R}_+$. Ainsi, x est unique et $x \leqslant a$.

4.
```python
def Dichotomie(n,a,epsilon)
    alpha = 0 #fn(alpha) <= 0, NDLR : a est déjà pris comme variable
    beta = a #fn(beta) >= 0
    while beta - alpha > epsilon:
        c = (beta + alpha)/2
        if fn(n,c,a) > 0: #0 est entre fn(c) et fn(alpha)
            beta = c
        else: #0 est entre fn(c) et fn(beta)
            alpha = c
    return alpha
```

5. Comme $f_n(0) = -a \neq f_n(x_n) = 0$, on peut en déduire que $x_n \neq 0$ et comme on sait que $x_n \in \mathbb{R}_+$, on en déduit que $x_n > 0$ $f_{n+1}(x_n) = f_n(x_n) + {x_n}^{n+1} = 0 + {x_n}^{n+1} > 0$.

6. Ainsi, $f_{n+1}(x_n) > 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$. Comme f_{n+1} est croissante, on en déduit que $x_n > x_{n+1}$. La suite $(x_n)_n$ est donc strictement décroissante. Elle est décroissante et minorée par 0, donc d'après le théorème de la limite monotone, $(x_n)_n$ converge.

7. Considérons $n > a$, alors $f_n(1) = n - a > 0$, ainsi $x_n \neq 1$, donc $f_n(x_n) = x_n \dfrac{1 - {x_n}^n}{1 - x_n} - a = 0$ en multipliant par $1 - x_n$, on obtient

$$x_n(1 - {x_n}^n) = a(1 - x_n)$$

De plus, comme $f_n(0) < 0 < f_n(1)$, le théorème des valeurs intermédiaires, assure l'existence d'un antécédent de 0 dans $]\,0\,;1\,[$ (car 0 et 1 ne conviennent pas), par unicité, $x_n \in \,]\,0\,;1\,[$ (dès que $n > a$). Fixons, $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 > a$ et $n \geqslant n_0$, alors par décroissance de $(x_n)_n$, $0 \leqslant x_n \leqslant x_{n_0}$, donc $0 \leqslant {x_n}^n \leqslant {x_{n_0}}^n$, or par limite d'une suite géométrique dont la raison en valeur absolue est strictement plus petite que 1, ${x_{n_0}}^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, d'après le théorème d'encadrement ${x_n}^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Notons ℓ la limite de $(x_n)_n$, par unicité de la limite, on obtient $\ell = a(1-\ell)$, donc $\ell(1+a) = a$, ainsi

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell = \frac{a}{1+a}$$

Problème : c'est l'histoire de quatre carrés qui rentrent dans un hangar...

Étude de E

1. M est inversible ssi $\det(M) \neq 0$ et dans ce cas $M^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$
2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$ et $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \in E$. Alors, $AB = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$ Donc

$$\begin{aligned}\det(AB) &= (ae+bg)(cf+dh) - (ce+dg)(af+bh) \\ &= aecf + aedh + bgcf + bgdh - ceaf - cebh - dgaf - dgbh \\ &= aedh + bgcf - cebh - dgaf\end{aligned}$$

   Tandis que

$$\det(A)\det(B) = (ad-bc)(eh-gf) = adeh + bcgf - bcec - adgf$$

   Ainsi, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
3. Soit $M \in E$, alors il existe a, b, c et d quatre complexes tels que

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = aE_{1,1} + bE_{1,2} + cE_{2,1} + dE_{2,2}$$

   Or, des complexes se décomposent à l'aide de la partie réelle et de la partie imaginaire, ainsi :

$$M = (\mathrm{Re}(a) + \mathrm{i}\mathrm{Im}(a))E_{1,1} + (\mathrm{Re}(b) + \mathrm{i}\mathrm{Im}(b))E_{1,2} + (\mathrm{Re}(c) + \mathrm{i}\mathrm{Im}(c))E_{2,1} + (\mathrm{Re}(d) + \mathrm{i}\mathrm{Im}(d))E_{2,2}$$

   En développant on obtient :

$$M = \mathrm{Re}(a)E_{1,1} + \mathrm{Im}(a)\mathrm{i}E_{1,1} + \mathrm{Re}(b)E_{1,2} + \mathrm{Im}(b)\mathrm{i}E_{1,2} + \mathrm{Re}(c)E_{2,1} + \mathrm{Im}(c)\mathrm{i}E_{2,1} + \mathrm{Re}(d)E_{2,2} + \mathrm{Im}(d)\mathrm{i}E_{2,2}$$

   Ceci démontre que $M \in \mathrm{vect}(\mathscr{B})$ et donc que $E \subset \mathrm{vect}(\mathscr{B})$, comme la famille $\mathscr{B}$ est une famille de l'espace vectoriel E, $\mathrm{vect}(\mathscr{B}) \subset E$. Par double inclusion, $E = \mathrm{vect}(\mathscr{B})$ et $\mathscr{B}$ est une famille génératrice de E. Soit $(a,b,c,d,e,f,g,h) \in \mathbb{R}^8$. Supposons que

$$aE_{1,1} + b\mathrm{i}E_{1,1} + cE_{1,2} + d\mathrm{i}E_{1,2} + eE_{2,1} + f\mathrm{i}E_{2,1} + gE_{2,2} + h\mathrm{i}E_{2,2} = 0_2$$

   Alors, $\begin{pmatrix} a+\mathrm{i}b & c+\mathrm{i}d \\ e+\mathrm{i}f & g+\mathrm{i}h \end{pmatrix} = 0_2$. Comme deux matrices égales ont même coefficients, on obtient que $a+\mathrm{i}b = c+\mathrm{i}d = e+\mathrm{i}f = g+\mathrm{i}h = 0$. Comme a, b, c, d, e, f, g et h sont réels, par unicité de la partie réelle et imaginaire, $a=b=c=d=e=f=g=h=0$. Donc, $\mathscr{B}$ est une famille libre de E. Dès lors, $\mathscr{B}$ est une base de E
4. On en déduit que $\dim_{\mathbb{R}}(E) = |\mathscr{B}| = 8$.

Étude des quaternions

On appelle quaternion toute matrice de E de la forme $M(z,w) = \begin{pmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$ où $(z,w) \in \mathbb{C}^2$. En particulier, on considère les quaternions suivants : $I = M(1,0)$, $J = M(0,1)$, $K = M(0,-\mathrm{i})$ et $L = M(-\mathrm{i},0)$. L'ensemble de tous les quaternions est $\mathbb{H} = \{M(z,w),\ \text{ où } (z,w) \in \mathbb{C}^2\}$.

5. Si cette matrice était un quaternion, on aurait $\bar{1} = -8i$ ce qui est faux, donc cette matrice n'est pas un quaternion.
6. • $\mathbb{H} \subset E$

- En posant $z = w = 0 \in \mathbb{C}$, $M(0,0) = 0_2 \in \mathbb{H}$
- Soit $(A, B, \lambda) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, alors il existe $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ tel que $A = M(z, w)$ et il existe $(z', w') \in \mathbb{C}^2$ tel que $B = M(z', w')$, alors :

$$\lambda A + B = \lambda \begin{pmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z' & -w' \\ \overline{w'} & \overline{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda z + z' & \lambda w + w' \\ \lambda \overline{w} + \overline{w'} & \lambda \overline{z} + \overline{z'} \end{pmatrix}$$

  On pose alors $Z = \lambda z + z' \in \mathbb{C}$ et $W = \lambda w + w' \in \mathbb{C}$, alors comme $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\overline{Z} = \overline{\lambda z + z'} = \overline{\lambda z} + \overline{z'} = \lambda \overline{z} + \overline{z'}$$

  De même, $\overline{W} = \lambda \overline{w} + \overline{w'}$ de sorte que $\lambda A + B = M(Z, W) \in \mathbb{H}$

Ainsi, H est un sous-espace vectoriel de E.

7. Commençons par écrire les matrices de la famille :
   - $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c'est la matrice identité)
   - $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
   - $K = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$
   - $L = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$

   Soit $A \in \mathbb{H}$, alors, il existe $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ tel que $A = \begin{pmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$. Or il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $z = a + \mathrm{i}b$ et $w = c + \mathrm{i}d$, ainsi,

$$A = \begin{pmatrix} a + \mathrm{i}b & -c - \mathrm{i}d \\ c - \mathrm{i}d & a - \mathrm{i}b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

   Dès lors, $A = aI - bL + cJ - dK \in \mathrm{vect}(I, J, K, L)$, on a donc montré que $\mathbb{H} \subset \mathrm{vect}(I, J, K, L)$, comme ces quatre matrices sont dans $\mathbb{H}$ et que $\mathbb{H}$ est un sous-espace vectoriel, l'autre inclusion est vraie, de sorte que $\mathbb{H} = \mathrm{vect}(I, J, K, L)$. Ainsi, (I, J, K, L) soit une famille génératrice de $\mathbb{H}$. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Supposons que $aI + bJ + cK + dL = 0_2$ alors $\begin{pmatrix} a - \mathrm{i}d & -b + c\mathrm{i} \\ b + c\mathrm{i} & a + \mathrm{i}d \end{pmatrix} = 0_2$. Ainsi, $a - \mathrm{i}d = -b + c\mathrm{i} = 0$, comme a, b, c et d sont réelles, par unicité de la partie réelle et de la partie imaginaire, $a = b = 0$ et $d = c = 0$ donc (I, J, K, L) est libre. Ainsi, (I, J, K, L) est une base de H.
8. Comme (I, J, K, L) est une base de $\mathbb{H}$, $\dim(\mathbb{H}) = |(I, J, K, L)| = 4$
9.
   - Comme I est la matrice identité, $I \times I = I$, $I \times J = J \times I = J$, $I \times K = K \times I = K$ et $I \times L = L \times I = L$
   - $J \times J = -I$, $K \times K = -I$ et $L \times L = -I$
   - $JK = L$, en multipliant cette relation par J à gauche, il vient $J^2K = JL$ soit $JL = -K$. En multipliant cette relation par L à droite, on obtient $JL^2 = -KL$ soit $KL = J$ en multipliant par K à gauche, on obtient $KJ = -L$
   - Comme $JK = L$ en multipliant par K à droite, on obtient $LK = -J$, en multipliant cette relation par L à gauche, on obtient $LJ = K$

$\times$	I	J	K	L
I	I	J	K	L
J	J	$-I$	L	$-K$
K	K	$-L$	$-I$	J
L	L	K	$-J$	$-I$

10. Proposons deux méthodes :
    - Soit $(A, B) \in \mathbb{H}^2$, alors il existe (a, b, c, d, e, f, g, h) tel que $A = aI + bJ + cK + dL$ et $B = eI + fJ + gK + hL$, alors par distributivité et en remplaçant les produits par leurs valeurs (en

utilisant le tableau précédent)

$$\begin{aligned}AB =&(aI + bJ + cK + dL)(eI + fJ + gK + hL)\\ =&aeI + afJ + agK + ahL + beJ - bfI + bgL - bhK + ceK - cfL - cgI + chJ\\ &+dL + dfK - dgJ - dhI\end{aligned}$$

Ainsi, $AB \in \mathrm{vect}(I, J, K, L) = \mathbb{H}$.

- Soit $(A, B) \in H^2$, il existe $(z, z'w, w') \in \mathbb{C}^4$ tel que $A = M(z, w)$ et $B = M(z', w')$. Alors $AB = \begin{pmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z' & -w' \\ \overline{w'} & \overline{z'}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} zz' - w\overline{w'} & -zw' - \overline{z'}w \\ \overline{w}z' + \overline{z}\overline{w'} & -\overline{w}w' + \overline{z}\overline{z'}\end{pmatrix}$. On pose alors $Z = zz' - w\overline{w'}$ et $W = zw' + \overline{z'}w$, de sorte que $AB = \begin{pmatrix} Z & -W \\ \overline{W} & \overline{Z}\end{pmatrix} \in \mathbb{H}$

11. Soit $M \in \mathbb{H}$, il existe z et w deux complexes tels que $M = \begin{pmatrix} z & -w \\ \bar{w} & \bar{z}\end{pmatrix}$, ainsi,

$$\det(M) = z\overline{z} + w\overline{w} = |z|^2 + |w|^2 \geqslant 0$$

12. Soit $A \in \mathbb{H}$ non nulle, il existe z et w deux complexes tels que $A = \begin{pmatrix} z & -w \\ \bar{w} & \bar{z}\end{pmatrix}$. Remarquons que $z \neq 0$ ou $w \neq 0$ (en effet, dans le cas contraire, on aurait $A = 0_2$), ainsi, $\det(A) = |z|^2 + |w|^2$, or comme z ou w est non nul le module au carré de l'un des deux est strictement positif et l'autre est positif, ainsi, $\det(A) > 0$. De plus, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \overline{z} & w \\ -\overline{w} & z\end{pmatrix}$. On pose alors $Z = \dfrac{\overline{z}}{\det A}$ et $W = \dfrac{-w}{\det A}$ de sorte que $A^{-1} = \begin{pmatrix} Z & -W \\ \overline{W} & \overline{Z}\end{pmatrix} \in \mathbb{H}$

13. Soit $M \in \mathbb{H}$, alors il existe $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ tel que $M = \begin{pmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z}\end{pmatrix}$. Alors, $M \in \mathbb{H} \cap \mathscr{S}_2(\mathbb{C})$ ssi M est symétrique ssi $-w = \overline{w}$, ssi $w + \overline{w} = 0$ ssi $2\mathrm{Re}(w) = 0$ ssi w est un imaginaire pur ssi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M = \begin{pmatrix} z & -\lambda \mathrm{i} \\ -\lambda \mathrm{i} & \overline{z}\end{pmatrix}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{H} \cap \mathscr{S}_2(C) &= \left\{\begin{pmatrix} z & -\lambda \mathrm{i} \\ -\lambda \mathrm{i} & \overline{z}\end{pmatrix} \mid (z, \lambda) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}\right\}\\ &= \left\{\begin{pmatrix} a + \mathrm{i}b & -\lambda \mathrm{i} \\ -\lambda \mathrm{i} & a - \mathrm{i}b\end{pmatrix} \mid (a, b, \lambda) \in \mathbb{R}^3\right\}\\ &= \left\{aI_2 - bL - \lambda K \mid (a, b, \lambda) \in \mathbb{R}^3\right\} = \mathrm{vect}(I, K, L)\end{aligned}$$

Ainsi, (I, K, L) est une famille génératrice de $\mathbb{H} \cap \mathscr{S}_2(\mathbb{C})$. De plus, comme cette famille est une famille incluse dans une famille libre (la base de $\mathbb{H}$ que l'on a trouvée précédemment), elle est libre. Ainsi, (I, L, K) est une base de $\mathbb{H} \cap \mathscr{S}_2(C)$ et donc $\dim(\mathbb{H} \cap \mathscr{S}_2(C)) = 3$

14. Comme (I, J, K, L) est une base de $\mathbb{H}$, $\mathrm{vect}(J)$ est un supplémentaire de $\mathbb{H} \cap \mathscr{S}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{vect}(I, K, L)$ dans $\mathbb{H}$.

Arithmétique

15. Soient n et m deux entiers naturels qui s'écrivent comme une somme de quatre carrés d'entiers naturels, alors il existe $(a, b, c, d, a', b', c', d') \in \mathbb{N}^8$ tel que $n = a^2 + b^2 + c^+d^2 = |a + \mathrm{i}b|^2 + |c + \mathrm{i}d|^2$, ainsi, $n = \det(M(z, w))$ avec $z = a + ib$ et $w = c + \mathrm{i}d$. De même, $m = \det(M(z', w'))$ avec $z' = a' + \mathrm{i}b'$ et $w' = c' + \mathrm{i}d'$. Alors, d'après les questions 2 et 10,

$$nm = \det(M(z, w))\det(M(z', w')) = \det(M(z, w)M(z', w')) = \det(M(Z, W))$$

où Z et W sont deux complexes définis à la question 10. On remarque que, d'après la formule de Z et W de la question 10, leurs parties réelles et imaginaires seront des entiers relatifs. Notons $\alpha = \mathrm{Re}(Z)$, $\beta = \mathrm{Im}(Z)$, $\gamma = \mathrm{Re}(W)$ et $\delta = \mathrm{Im}(W)$, alors $nm = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$. Si α est négatif, on remplace α par $-\alpha$ de même pour les autres. Ainsi, nm est bien une somme de quatre carrés d'entiers naturels.

16. $a^2 - a'^2 = (a-a')(a+a')$. Ainsi, si p divise $a-a'$ ou $a+a'$, alors p divise $a^2-a'^2$. Réciproquement supposons que p divise $(a-a')(a+a')$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $(a-a')(a+a') = kp$ en remplaçant k par sa factorisation en nombres premier, on peut en déduire que p apparaît dans la décomosition en facteurs premier de $kp = (a-a')(a+a')$. Ainsi, si p n'apparaissait ni dans la décomposition de $a-a'$ ni dans celle de $a+a'$ on en déduirait une décomposition de $(a-a')(a+a')$ sans p. Ceci contredirait l'unicité de la décomposition. Ainsi, p apparaît soit dans la décomosition de $a-a'$ soit dans cette de $a+a'$ ainsi p divise $a-a'$ soit $a+a'$. En conclusion : p divise $a^2-a'^2$ ssi p divise $a-a'$ ou p divise $a+a'$.
17. Soit p un nombre premier impair. Démontrer qu'il existe des entiers naturels a et b dans $\llbracket 0\,; \frac{p-1}{2} \rrbracket^2$ tel que p divise $1+a^2+b^2$.
18. Démontrer que tout entier naturel s'écrit comme une somme de quatre carrés d'entiers naturels.

Exercice : Vos limites seront mises à rude épreuve

Proposons trois méthodes similaires :

- Par définition de la limite, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour $x \geqslant A$, $f'(x) \geqslant 1$. Soit $x > A$, comme f est continue sur $[\,A\,; x\,]$ (car dérivable), dérivable sur $]\,A\,; x\,[$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in \,]\,A\,; x\,[$ tel que $\dfrac{f(x)-f(A)}{x-A} = f'(c) \geqslant 1$, en multipliant par $x-A>0$, on obtient $f(x) \geqslant f(A) + (x-A)$, or $f(A)+x-A \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, par minoration, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$
- Par définition de la limite, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour $x \geqslant A$, $f'(x) \geqslant 1$, par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_A^x f'(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_A^x 1\,\mathrm{d}t$, donc $f(x)-f(A) \geqslant (x-A)$, donc $f(x) \geqslant x - A + f(A)$ et on conclut comme à la méthode précédente.
- Par définition de la limite, f' est positive sur un voisinage de $+\infty$, ainsi sur ce voisinage, f est croissante. D'après le théorème de la limite monotone, f admet une limite ℓ et $\ell \in \mathbb{R}$ ou $\ell = +\infty$. Supposons, $\ell \in \mathbb{R}$, alors, par composition et somme, $f(x+1) - f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell - \ell = 0$. Or, comme f' tend vers l'infini, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour $x \geqslant A$, $f'(x) \geqslant 1$, ainsi, d'après le théorème des d'accroissements finis, il existe $c(x) \in \,]\,x\,; x+1\,[$ $f(x+1)-f(x) = f'(c(x)) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, ce qui contredit la limite de f' en $+\infty$.