DS6

8 Mars 2025

La calculatrice est interdite. L'usage de tout document est interdit. La rigueur, le soin, la présentation seront fortement pris en compte dans la notation. Les résultats de chaque question seront soulignés ou encadrés. Vous pouvez faire les problèmes dans l'ordre qui vous plaît, mais veuillez bien indiquer le numéro de l'exercice.

Un Café Cours !

1. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
2. Énoncer le théorème des bornes atteintes.
3. Énoncer le théorème des accroissements finis.
4. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{L} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille de E, définir $\mathscr{L}$ libre.
5. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille de E. Donner la définition de vect $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.
6. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E, donner la définition de $F + G$.

Exercice : Ne faites pas trop de plans dans la quatrième dimension !

On pose $E = \mathbb{R}^4$ et on définit

$$F = \mathrm{vect}((1,2,0,0),(0,1,1,1))$$
$$G = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + z + t = 0 \text{ et } x + 3y + z - t = 0\right\}$$

1. Déterminer une base de F ainsi que sa dimension.
2. Démontrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
3. Déterminer une base de G ainsi que sa dimension.
4. Démontrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
5. Donner une base adaptée à $\mathbb{R}^4 = F + G$.

Exercice : Expliciter la limite d'une suite implicite

On fixe a un réel strictement positif. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $f_n : x \mapsto \left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right) - a$

1. Écrire une fonction Python `fn(n,x,a)` qui renvoie la valeur de $f_n(n, x, a)$.
2. Écrire une deuxième fonction Python `fn(n,x,a)` qui renvoie la valeur de $f_n(n, x, a)$ mais cette fois-ci de façon récursive.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue x admet une et une seule solution dans $\mathbb{R}_+$. On note x_n cette solution. Démontrer que $x_n \leqslant a$.
4. Écrire une fonction Python `Dichotomie(n,a,epsilon)` qui renvoie une approximation par la méthode de Dichotomie de x_n à epsilon près où epsilon est un réel strictement positif.
5. Déterminer le signe de $f_{n+1}(x_n)$.
6. En déduire que la suite $(x_n)_n$ est monotone. En déduire que $(x_n)_n$ est une suite convergente.
7. Déterminer la limite de $(x_n)_n$.

Problème : c'est l'histoire de quatre carrés qui rentrent dans un hangar...

On note $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées de taille 2 à coefficients complexes. On rappelle que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel grâce aux deux opérations suivantes :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E \quad \forall M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in E \qquad \lambda M = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M+M' = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$

On ne demande pas de vérifier que E est bien un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Dans tout ce problème, on ne considérera que des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. En particulier lorsqu'on fera une combinaison linéaire, les multiplications des vecteurs de E (ici des matrices) par des scalaires se fera avec des **nombres réels uniquement**.

Étude de E

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de E avec a, b, c et d quatre complexes. Rappeler sans preuve à quelle condition nécessaire et suffisante sur $\det(A) = ad - bc$, A est inversible et donner la formule calculant son inverse.
2. Démontrer que pour tout $(A, B) \in E^2$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
3. Montrer que $\mathscr{B} = (E_{1,1}, \mathrm{i}E_{1,1}, E_{1,2}, \mathrm{i}E_{1,2}, E_{2,1}, \mathrm{i}E_{2,1}, E_{2,2}, \mathrm{i}E_{2,2})$ est une base de E. Où $E_{i,j}$ désigne la matrice élémentaire de E (tous les coefficients de $E_{i,j}$ sont nuls sauf celui à la i-ème ligne et j-ième colonne qui vaut 1).
4. En déduire $\dim_{\mathbb{R}}(E)$ la dimension de E (vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel)

Étude des quaternions

On appelle quaternion toute matrice de E de la forme $M(z, w) = \begin{pmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$ où $(z, w) \in \mathbb{C}^2$. En particulier, on considère les quaternions suivants : $I = M(1, 0)$, $J = M(0, 1)$, $K = M(0, -\mathrm{i})$ et $L = M(-\mathrm{i}, 0)$. L'ensemble de tous les quaternions est $\mathbb{H} = \{M(z, w),\ \text{ où } (z, w) \in \mathbb{C}^2\}$.

5. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 2+\mathrm{i} & -8\mathrm{i} \end{pmatrix}$ est-elle un quaternion ?
6. Montrer que $\mathbb{H}$ est un sous-espace vectoriel de E.
7. Montrer que (I, J, K, L) une base de $\mathbb{H}$.
8. Quelle est la dimension de $\mathbb{H}$?
9. Recopier et compléter le tableau suivant :

$\times$	I	J	K	L
I			?	
J				
K				
L				

Table 1 – À la place de ? indiquer le produit $I \times K$ *idem* pour les autres cases. Faire attention à l'ordre.

10. Soit $(A, B) \in \mathbb{H}^2$ montrer alors que $AB \in \mathbb{H}$ (on dit que $\mathbb{H}$ est stable par produit).
11. Soit $A \in \mathbb{H}$, montrer que $\det(A) \in \mathbb{R}^+$.
12. Soit $A \in \mathbb{H}$ non nul, montrer que A est inversible puis que $A^{-1} \in \mathbb{H}$.
13. Déterminer la dimension de $\mathbb{H} \cap \mathscr{S}_2(\mathbb{C})$ où $\mathscr{S}_2(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices symétriques de E.
14. Déterminer un exemple de supplémentaire de $\mathbb{H} \cap \mathscr{S}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{H}$.

Arithmétique

15. Montrer que si deux entiers naturels peuvent tous les deux s'écrire comme une somme de quatre carrés d'entiers naturels, alors il en est de même pour leur produit.
16. Soit p un nombre premier impair et a et a' deux entiers, déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que p divise $a^2 - a'^2$.
17. Soit p un nombre premier impair. Démontrer qu'il existe des entiers naturels a et b dans $[\![0\,; \frac{p-1}{2}]\!]^2$ tel que p divise $1 + a^2 + b^2$.
18. Démontrer que tout entier naturel s'écrit comme une somme de quatre carrés d'entiers naturels.

Exercice : Vos limites seront mises à rude épreuve

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable, on suppose que $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.