Problème 1 : soyez hyper bons avec les fonctions hyperboliques !

Étude d'une fonction

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$, $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$.

2. Comme $\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{o}(\mathrm{e}^x)$, ainsi, $\qquad \mathrm{ch}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^x}{2} \quad$ et $\quad \mathrm{sh}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$

   De même, $\mathrm{e}^{x} \underset{x\to-\infty}{=} \mathcal{o}(\mathrm{e}^{-x})$, ainsi, $\qquad \mathrm{ch}(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2} \quad$ et $\quad \mathrm{sh}(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} -\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2}$

3. $\mathrm{ch}(x) \underset{0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathcal{o}(x^{2n}) \qquad \mathrm{sh}(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathcal{o}(x^{2n+1})$

4. On pose $u = \mathrm{sh}(x)$, alors :
   - $u \underset{0}{=} x + \dfrac{x^3}{6} + \mathcal{o}(x^3)$,
   - $u^2 \underset{0}{=} x^2 + \mathcal{o}(x^3)$
   - $u^3 \underset{0}{=} x^3 + \mathcal{o}(x^3)$
   - Ainsi, $u^3 \underset{0}{\sim} x^3$, donc $\mathcal{o}(u^3) \underset{0}{=} \mathcal{o}(x^3)$.

   Ainsi, on effectue le $DL_3(0)$ de $\mathrm{sh}(u)$:

$$\mathrm{sh}(\mathrm{sh}(x)) = \mathrm{sh}(u) \underset{0}{=} u + \frac{u^3}{6} + \mathcal{o}(u^3) = \left(x + \frac{x^3}{6} + \mathcal{o}(x^3)\right) + \frac{x^3 + \mathcal{o}(x^3)}{6} + \mathcal{o}(x^3) = x + \frac{x^3}{3} + \mathcal{o}(x^3)$$

   Ainsi, $\mathrm{sh}(\mathrm{sh}(x)) - x \underset{0}{=} \dfrac{x^3}{3} + \mathcal{o}(x^3) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^3}{3}$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$, et par imparité de sh,

$$f(-x) = (-x) \times \mathrm{sh}\left(\frac{1}{-x}\right) = (-x) \times (-1) \times \mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$$

   Dès lors, la fonction f est paire.

6. Comme $\mathrm{sh}(u) \underset{0}{=} u + \mathcal{o}(u)$, $\mathrm{sh}(u) \underset{0}{\sim} u$. On obtient alors $\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$. Par produit d'équivalents, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x \times \dfrac{1}{x} = 1$, donc $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$. De même[1], $f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x \times \dfrac{1}{x} = 1$, donc $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 1$.

7. Par croissance comparée : $x \times \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to0^+]{} +\infty$. De plus, $x \times \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to0^+]{} 0$, par somme de limites, $f(x) \xrightarrow[x\to0^+]{} +\infty$. Comme f est paire, $f(x) \xrightarrow[x\to0^-]{} +\infty$, ainsi $f(x) \xrightarrow[x\to0]{} +\infty$.

8. La fonction $x \mapsto 1/x$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sh est dérivable sur $\mathbb{R}$, par composition, $x \mapsto \mathrm{sh}(1/x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, par produit f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad f'(x) = \mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right) + x \times \frac{-1}{x^2} \times \mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right) = \left[\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right)}{\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)} - \frac{1}{x}\right] \times \mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)$$

9. Notons $\mathrm{th}\colon u \mapsto \mathrm{sh}(u)/\mathrm{ch}(u)$, alors th est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\forall u \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{th}'(u) = \frac{\mathrm{ch}(u)^2 - \mathrm{sh}(u)^2}{\mathrm{ch}^2(u)} = 1 - \mathrm{th}^2(u)$$

   Proposons deux méthodes :

1. Comme f est paire, on aurait aussi pu dire que puisque f tend vers 1 en $+\infty$, nécessairement f tend vers 1 en $-\infty$.

- Posons, $g\colon u \mapsto u - \mathrm{th}(u)$, alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall u \in \mathbb{R} \qquad g'(u) = 1 - \mathrm{th}'(u) = \mathrm{th}^2(u) \geqslant 0$$

De plus, $\mathrm{th}(u) = \mathrm{sh}(u)/\mathrm{ch}(u) = 0$ ssi $\mathrm{sh}(u) = 0$ ssi $u = 0$. Ainsi, pour tout $u > 0$, $g'(u) = \mathrm{th}^2(u) > 0$. Ainsi, g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc pour tout $u > 0$, $g(u) > g(0) = 0$, donc $u > \mathrm{th}(u)$.
- Soit $u \in \mathbb{R}^*$, th est continue sur $[\,0\,;u\,]$, dérivable sur $]\,0\,;u\,[$, donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]\,0\,;u\,[$, tel que $\dfrac{\mathrm{th}(u) - \mathrm{th}(0)}{u - 0} = \mathrm{th}'(c) < 1$, ainsi, $\mathrm{th}(u) < u$.

10. Pour tout $x > 0$, $\mathrm{ch}\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0$ et d'après ce qui précède, $\dfrac{\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right)}{\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)} - \dfrac{1}{x} < 0$, par produit, $f'(x) < 0$, ainsi f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, comme f est paire, on en déduit également strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
11. $\mathrm{sh}(u) \underset{0}{=} u + \dfrac{u^3}{6} + \dfrac{u^5}{120} + o(u^5)$, en divisant par u, on obtient :

$$\frac{\mathrm{sh}(u)}{u} \underset{0}{=} 1 + \frac{u^2}{6} + \frac{u^4}{120} + o(u^4)$$

12. Quand $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, $u = \dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$, ainsi par ce qui précède

$$f(x) = x\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to\pm\infty}{=} 1 + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{120x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

On obtient ainsi le développement asymptotique avec $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1/6$, $a_3 = 0$, $a_4 = 1/120$.
13. On a :

$$f\left(\frac{1}{x}\right) \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)$$

Ceci montre, en particulier, que $f\left(\dfrac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$. Ainsi, $x \mapsto f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ se prolonge alors par continuité en une application F avec $F(0) = 1$, F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par composée, de plus, par troncature d'un développement limité, $F(x) \underset{0}{=} F(0) + o(x)$, ainsi F est dérivable en 0 et $F'(0) = 0$.

Étude d'une suite

14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme f est strictement décroissante et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, d'après le théorème de la bijection strictement monotone, f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers

$$f(\mathbb{R}_+^*) = \left]\lim_{x\to+\infty} f(x)\,;\lim_{x\to 0^+} f(x)\right[=]\,1\,;+\infty\,[$$

Or, $\dfrac{n+1}{n} \in]\,1\,;+\infty\,[$, ainsi, il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}_+^*$, tel que $f(u_n) = \dfrac{n+1}{n}$.
15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrons que $u_{n+1} \geqslant u_n$, supposons que $u_n > u_{n+1}$, alors comme f est strictement décroissante, $f(u_n) < f(u_{n+1})$, soit $1 + \dfrac{1}{n} < 1 + \dfrac{1}{n+1}$, soit $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n+1}$, en passant à l'inverse, on obtient $n + 1 < n$, soit $1 < 0$ ce qui est absurde, ainsi $u_{n+1} \geqslant u_n$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
16. Comme $(u_n)_n$ est croissante alors, d'après le théorème de la limite monotone $(u_n)_n$ est majorée ou bien $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit majorée : il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant M$, Notons alors que $M > 0$ (car, par exemple, $u_3 > 0$) comme f est décroissante, $f(u_n) \geqslant f(M)$, soit $\dfrac{n+1}{n} \geqslant f(M)$. Comme les inégalités larges sont conservées par passage à la limite, on obtient que $f(M) \leqslant 1$, or $f(M) \in f(\mathbb{R}^*) =]\,1\,;+\infty\,[$ donc $f(M) > 1$ ce qui est absurde. Ainsi, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

17. En utilisant le résultat de la question 12, en tronquant à l'ordre 2, on obtient :
$$\frac{n+1}{n} = f(u_n) = 1 + \frac{1}{6{u_n}^2} + o\left(\frac{1}{{u_n}^2}\right)$$
En retranchant 1 des deux côtés, on obtient
$$\frac{1}{n} = \frac{1}{6{u_n}^2} + o\left(\frac{1}{{u_n}^2}\right) \sim \frac{1}{6{u_n}^2}$$
Donc ${u_n}^2 \sim \frac{n}{6}$, comme les équivalents sont conservées par passage à une puissance et que $u_n > 0$, on obtient $u_n \sim \sqrt{\frac{n}{6}}$.

Problème 2 : que reste-t'il de vos polynômes ?

Généralités sur l'application φ

1. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$, alors $AP \in \mathbb{C}[X]$ et on effectue la division euclidienne de AP par B, d'après les rappels, le reste de cette division, noté $\varphi(P)$, vérifie $d^\circ\varphi(P) < d^\circ B = n+1$, dès lors $d^\circ\varphi(P) \leqslant n$ Ceci montre que $\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.
2. En développant et en remplaçant AP_1 et AP_2 par leur division euclidienne, on obtient :
$$A(P_1 + \lambda P_2) = AP_1 + \lambda AP_2 = BQ_1 + R_1 + \lambda(BQ_2 + R_2) = B(Q_1 + \lambda Q_2) + R_1 + \lambda R_2$$
Remarquons que comme R_1 et R_2 appartiennent à l'espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$ alors $R_1 + \lambda R_2 \in \mathbb{C}_n[X]$, en particulier, $d^\circ(R_1 + \lambda R_2) \leqslant n < d^\circ B$. Par unicité de la division euclidienne de $A(P_1 + \lambda P_2)$ par $B \neq 0$, on en déduit que le reste de cette division est $R_1 + \lambda R_2$ et le quotient de la division euclidienne de $A(P_1+\lambda P_2)$ par B est $Q_1+\lambda Q_2$. On peut donc en déduire que $\varphi(P_1+\lambda P_2) = R_1+\lambda R_2 = \varphi(P_1)+\lambda\varphi(P_2)$. Ceci prouve que φ est linéaire. En utilisant le résultat de la question 1, on peut en déduire que φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

Étude d'un premier exemple

3. Calculons $\varphi(1)$, $\varphi(X)$, $\varphi(X^2)$ et décomposons ces vecteurs dans la base canonique $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$:
   - $A \times 1 = X^2 + 2X = B \times 0 + (X^2 + 2X)$ avec $d^\circ(X^2 + 2X) = 2 < d^\circ B = 3$, ainsi, 0 est le quotient de la division euclidienne de $A \times 1$ par B et $X^2 + 2X$ en est le reste. Dès lors,
   $$\varphi(1) = X^2 + 2X = 0 \times 1 + 2 \times X + 1 \times X^2$$
   - $A \times X = X^3 + 2X^2 = B \times 1 + (X^2 + X + 1)$ avec $d^\circ(X^2 + X + 1) = 2 < d^\circ B = 3$, ainsi, 1 est le quotient de la division euclidienne de AX par B et $X^2 + X + 1$ en est le reste. Dès lors,
   $$\varphi(X) = X^2 + X + 1 = 1 \times 1 + 1 \times X + 1 \times X^2$$
   - $A \times X^2 = X^4 + 2X^3 = B \times (X+1) + (2X+1)$ avec $d^\circ(2X+1) = 1 < d^\circ B = 3$, ainsi, $X+1$ est le quotient de la division euclidienne de AX^2 par B et $2X+1$ en est le reste. Dès lors,
   $$\varphi(X^2) = 2X + 1 = 1 \times 1 + 2 \times X + 0 \times X^2$$

   Ainsi, on a montré que
   $$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
4. Notons $\mathscr{B}' = (X^2 - 1, X^2 - X, 1 + 2X + X^2)$, présentons trois méthodes pour montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{C}_2[X]$:
   - Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}_3[X]$, supposons $\alpha(X^2 - 1) + \beta(X^2 - X) + \gamma(1 + 2X + X^2) = 0$. En remplaçant X par 1, on obtient $\gamma = 0$ et donc $\alpha(X^2 - 1) + \beta(X^2 - X) = 0$, en remplaçant X par 0, on obtient que $\alpha = 0$ d'où $\beta(X^2 - X) = 0$, comme $X^2 - X$ n'est pas le polynôme nul, $\beta = 0$, ainsi, la famille $\mathscr{B}'$ est libre. De plus, $\dim(\mathbb{C}_2[X]) = 3 = |\mathscr{B}'|$. Donc, $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{C}_2[X]$.

- Notons $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{C}_2[X]$, pour démontrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{C}_2[X]$, il suffit de montrer que $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$ est non nul or ce déteminant vaut (en effectuant une opération puis la formule du déterminant d'une matrice triangulaire) :

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1 + L_2}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

  Ceci prouve que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{C}_2[X]$.
- Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}_3[X]$, supposons $\alpha(X^2 - 1) + \beta(X^2 - X) + \gamma(1 + 2X + X^2) = 0$. Donc $(\alpha + \beta + \gamma)X^2 + (-\beta + 2\gamma)X + (-\alpha + \gamma) = 0$, ainsi par unicité de la décomposition d'un polynôme dans la base canonique, on obtient le système $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -\beta + 2\gamma = 0 \\ -\alpha + \gamma = 0 \end{cases}$, après résolution, on trouve que $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ainsi, la famille $\mathscr{B}'$ est libre. De plus, $\dim(\mathbb{C}_2[X]) = 3 = |\mathscr{B}'|$. Donc, $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{C}_2[X]$.

5. Pour calculer la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}'$, calculons les images des vecteurs de $\mathscr{B}'$ par φ et exprimons ces vecteurs dans la base $\mathscr{B}'$. Comme on a déjà calculé $\varphi(1)$, $\varphi(X)$ et $\varphi(X^2)$, utilisons la linéarité de φ :

$$\begin{aligned}
\varphi(X^2 - 1) &= \varphi(X^2) - \varphi(1) = (1 + 2X) - (2X + X^2) = -X^2 + 1 \\
&= -1(X^2 - 1) + 0(X^2 - X) + 0(1 + 2X + X^2) \\
\varphi(X^2 - X) &= \varphi(X^2) - \varphi(X) = (1 + 2X) - (1 + X + X^2) = -X^2 + X \\
&= 0(X^2 - 1) + (-1)(X^2 - X) + 0(1 + 2X + X^2) \\
\varphi(1 + 2X + X^2) &= \varphi(1) + 2\varphi(X) + \varphi(X^2) = (2X + X^2) + 2(1 + X + X^2) + (2X + 1) = 3X^2 + 6X + 3 \\
&= 0(X^2 - 1) + 0(X^2 - X) + 3(1 + X + X^2)
\end{aligned}$$

Ceci démontre que $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

6. D'après la formule de changement de base, $K = PDP^{-1}$ où $P = P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'}$ est la matrice de changement de base de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ On sait de plus que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K^n = PD^nP^{-1}$, après calcul de l'inverse il vient que

$$P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
K^n &= PD^nP^{-1} = \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}\right] \times \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -(-1)^n & 0 & 3^n \\ 0 & -(-1)^n & 2 \times 3^n \\ (-1)^n & (-1)^n & 3^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3(-1)^n + 3^n & 3^n - (-1)^n & 3^n - (-1)^n \\ 2(3^n - (-1)^n) & 2(3^n + (-1)^n) & 2(3^n - (-1)^n) \\ 3^n - (-1)^n & 3^n - (-1)^n & 3(-1)^n + 3^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On remarque que pour $n = 0$, on retrouve $K^n = I_3$ et pour $n = 1$, $K^n = K$ (faire ce genre de vérification permet de détecter d'éventuels erreurs).

Étude du cas où B est scindé à racines simples

7. Soit $j \in [\![0\,; n]\!]$, en séparant les cas où $k = j$ et $k \neq j$ dans la somme, on obtient :

$$D(x_j) = P(x_j) - \sum_{k=0}^{n} P(x_k)L_k(x_j) = P(x_j) - \left[P(x_j)\underbrace{L_j(x_j)}_{=1} + \sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} P(x_k) \times \underbrace{L_k(x_j)}_{=0 \text{ car } k\neq j} \right] = 0$$

Ainsi, $x_0, \ldots, x_n$ sont racines du polynôme D.

8. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$, remarquons alors que le polynôme D de la question précédente est une combinaison linéaire de polynômes de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$, ainsi $D \in \mathbb{C}_n[X]$, donc $d^\circ D \leqslant n$, de plus la question précédente montre que D a au moins $n+1$ racines (les $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sont distincts). Or, d'après le cours, un polynôme non nul possède un nombre de racines (comptés avec multiplicité) inférieure ou égale à son degré. On peut donc en conclure que D est le polynôme nul, dès lors $P = \sum_{k=0}^{n} P(x_k)L_k$.

9. La question 8 montre que tout polynôme de $\mathbb{C}_n[X]$, se décomposée comme une combinaison linéaire de la famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$, donc $\mathbb{C}_n[X] \subset \mathrm{vect}\,(L_0, L_1, \ldots, L_n)$. En outre, les polynômes L_k sont dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$, il s'ensuit que $\mathrm{vect}\,(L_0, L_1, \ldots, L_n) \subset \mathbb{C}_n[X]$. Par double inclusion,

$$\mathbb{C}_n[X] = \mathrm{vect}\,(L_0, L_1, \ldots, L_n)$$

La famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est alors génératrice de $\mathbb{C}_n[X]$. De plus, cette famille a pour cardinal $n+1 = \dim(\mathbb{C}_n[X])$, d'après le cours, $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est donc une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

10. On sait que $AL_k = BQ_k + R_k$, évaluons ce polynôme en x_j avec $j \neq k$, on obtient :

$$A(x_j)L_k(x_j) = B(x_j)Q_k(x_j) + R_k(x_j)$$

Or $L_k(x_j) = 0$ et $B(x_j) = 0$, dès lors $R_k(x_j) = 0$. En revanche, si on évalue ce polynôme en x_k :

$$A(x_k)L_k(x_k) = B(x_k)Q_k(x_k) + R_k(x_k)$$

avec $L_k(x_k) = 1$ et toujours $B(x_k) = 0$, on obtient $R_k(x_k) = A(x_k)$.

11. En appliquant la question 8 à $R_k \in \mathbb{C}_n[X]$,

$$\varphi(L_k) = R_k = \sum_{j=0}^{n} R_k(x_j)L_k$$

Comme $R_k(x_j) = 0$ si $j \neq k$, il reste $\varphi(L_k) = R_k(x_k)L_k = A(x_k)L_k$.

12. D'après la question précédente, pour tout $k \in [\![0\,; n]\!]$

$$\varphi(L_k) = A(x_k)L_k = 0 \times L_0 + 0 \times L_1 + \ldots + 0 \times L_{k-1} + A(x_k) \times L_k + 0 \times L_{k+1} + \ldots 0 \times L_n$$

Or L_k est le $k+1$-ième vecteur de la base $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$. Ainsi, la matrice de φ dans la base $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ a pour $k+1$-ième colonne les coordonnées de $\varphi(L_k)$ dans la base $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$, ces coordonnées sont toutes nulles sauf celles devant L_k qui vaut $A(x_k)$ ce coefficient se trouve à la $k+1$-ième ligne. Ainsi la matrice de φ dans la base $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est diagonale dont les éléments diagonaux sont $A(x_0)$, $A(x_1), \ldots, A(x_n)$.

Étude d'un second exemple

13.
   - $A \times 1 = \alpha + \beta X + \gamma X^2 = B \times 0 + (\alpha + \beta X + \gamma X^2)$ avec $d^\circ(\alpha + \beta X + \gamma X^2) \leqslant 2 < d^\circ B$. Donc le reste de la division euclidienne de $A \times 1$ par B est $\alpha + \beta X + \gamma X^2$. Ainsi,

$$\varphi(1) = \alpha + \beta X + \gamma X^2 = \alpha \times 1 + \beta \times X + \gamma \times X^2$$

   - $A \times X = \alpha X + \beta X^2 + \gamma X^3 = \gamma B + (\alpha X + \beta X^2)$ avec $d^\circ(\alpha X + \beta X^2) \leqslant 2 < d^\circ B$. Donc, le reste de la division euclidienne de $A \times X$ par B est $\alpha X + \beta X^2$. Ainsi,

$$\varphi(X) = \alpha X + \beta X^2 = 0 \times 1 + \alpha \times X + \beta \times X^2$$

- $A \times X^2 = \alpha X^2 + \beta X^3 + \gamma X^4 = (\gamma X + \beta)B + (\alpha X^2)$ avec $d^\circ(\alpha X^2) \leqslant 2 < d^\circ B$. Donc, le reste de la division euclidienne de $A \times X^2$ par B est αX^2. Ainsi,

$$\varphi(X^2) = \alpha X^2 = 0 \times 1 + 0 \times X + \alpha \times X^2$$

On a ainsi montré que

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

14. Notons $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ \gamma & \beta & 0 \end{pmatrix}$ de sorte que $T = \alpha I_3 + N$ remarquons que $(\alpha I_3) \times N = \alpha N = N \times (\alpha I_3)$. De plus, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^3 = N^2 \times N = 0_3$. La matrice N est donc nilpotente et pour tout entier $k \geqslant 3$, $N^k = 0_3$. Appliquons alors la formule du binôme de Newton pour les deux matrices qui commutent :

$$\begin{aligned} T^n &= (\alpha I_3 + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k (\alpha I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} N^k (\alpha I_3)^{n-k} + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{N^k}_{=0_3} (\alpha I_3)^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} N^0 (\alpha I_3)^n + \binom{n}{1} N (\alpha I_3)^{n-1} + \binom{n}{2} N^2 (\alpha I_3)^{n-2} \\ &= \alpha^n I_3 + n\alpha^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2} \alpha^{n-2} N^2 \\ &= \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ n\alpha^{n-1}\beta & \alpha^n & 0 \\ n\alpha^{n-1}\gamma + \dfrac{n(n-1)}{2}\alpha^{n-2}\beta^2 & n\alpha^{n-1}\beta & \alpha^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

15. Puisque que P est une matrice inversible, c'est une matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}_2[X]$, notée $\mathscr{B}$, vers une autre base de $\mathbb{C}_2[X]$, notée $\mathscr{B}'$, ainsi d'après la formule de changement de base D est alors la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}'$.
16. Notons $D = (d_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 3 \\ 1 \leqslant j \leqslant 3}}$ et $\mathscr{B}' = (P_1, P_2, P_3)$, comme $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\varphi)$ et que D est diagonale on en déduit que
$$\varphi(P_1) = d_{1,1}P_1 + d_{2,1}P_2 + d_{3,1}P_3 = d_{1,1}P_1$$
de même $\varphi(P_2) = d_{2,2}P_2$ et $\varphi(P_3) = d_{3,3}P_3$. En posant $d_1 = d_{1,1}$, $d_2 = d_{2,2}$ et $d_3 = d_{3,3}$, on obtient le résultat voulu.
17. Soit $i \in [\![1 ; 3]\!]$, on $\varphi(P_i) = d_i P_i$, ainsi $\varphi(P_i) - d_i P_i = 0$ donc $(\varphi - d_i \mathrm{Id})(P_i) = 0$. Comme P_i est un élément d'une base, P_i est non nul, ce qui prouve que le noyau de $\varphi - d_i\mathrm{Id}$ n'est pas réduit au polynôme nul, donc $\varphi - d_i\mathrm{Id}$ n'est pas injective donc pas bijective.
18. Soit $i \in [\![1 ; 3]\!]$ Donc la matrice de $\varphi - d_i\mathrm{Id}$ dans la base $\mathscr{B}$ n'est pas inversible. Or, cette matrice est triangulaire supérieure avec $\alpha - d_i$ sur sa diagonale, comme une matrice triangulaire est inversible si et seulement si ces coefficients sur la diagonale, on en déduit que $\alpha - d_i = 0$, donc que $d_1 = d_2 = d_3 = \alpha$, donc $D = \alpha I_3$, donc $T = \alpha P I_3 P^{-1} = \alpha I_3$, par unicité des coefficients d'une matrice, on en déduit que $\beta = \gamma = 0$. Par contraposée, si $(\beta, \gamma) \neq (0, 0)$, T n'est pas diagonalisable.

Exercice facultatif

1. $\mathscr{B}$ est une base de E et $\mathscr{F} = (\delta_{i,j})_{1 \leqslant j \leqslant n}$ est une famille de réels, comme une application linéaire est entièrement caractérisée par l'image d'une de ces bases, il existe une unique $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ tel que pour tout $j \in [\![1 ; n]\!]$, $\varphi(e_j) = \delta_{i,j}$.

2. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, supposons que $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k e_k^* = 0_{\mathscr{L}(E,\mathbb{K})}$. Ainsi, pour tout $x \in E$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k e_k^*(x) = 0_E$. Soit $i \in [\![1\,;n]\!]$, on évalue en e_i, on a donc $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k e_k^*(e_i) = 0$. Par définition de e_k^*, on a donc $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \delta_{i,k} = 0$, donc $\lambda_i = 0$ et ce pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$. On a donc montré que $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une famille libre de $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$, or, d'après le cours, $\dim(\mathscr{L}(E,\mathbb{K})) = \dim(E) \times \dim(\mathbb{K}) = n \times 1 = n$, ainsi $\mathscr{B}^*$ est une base de $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$.

3.