DS7

5 Avril 2025

La calculatrice est interdite. L'usage de tout document est interdit. La rigueur, le soin, la présentation seront fortement pris en compte dans la notation. Les résultats de chaque question seront soulignés ou encadrés. Vous pouvez faire les problèmes/exercices dans l'ordre qui vous plaît.

Problème 1 : soyez hyper bons avec les fonctions hyperboliques !

Dans ce problème, on note ch la fonction cosinus hyperbolique, sh la fonction sinus hyperbolique.

Étude d'une fonction

1. Rappeler la définition de $\mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{sh}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2. Donner un équivalent de $\mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{sh}(x)$ quand $x \to +\infty$, puis quand $x \to -\infty$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, rappeler de $DL_{2n}(0)$ de ch et le $DL_{2n+1}(0)$ de sh à l'aide du symbole $\sum$.
4. Calculer le $DL_3(0)$ de $\mathrm{sh}(\mathrm{sh}(x))$, en déduire un équivalent de $\mathrm{sh}(\mathrm{sh}(x)) - x$ en 0.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \times \mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

5. Étudier la parité de f.
6. Rappeler un équivalent de $\mathrm{sh}(u)$ en 0 puis en déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
7. Déterminer la limite de f en 0.
8. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad f'(x) = \left[\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right)}{\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)} - \frac{1}{x}\right] \times \mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)$$

9. Montrer que pour tout $u > 0$, $\dfrac{\mathrm{sh}(u)}{\mathrm{ch}(u)} < u$.
10. En déduire le tableau de variation de f.
11. Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $u \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}(u)}{u}$.
12. En déduire qu'au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$, f admet un développement asymptotique de la forme :

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \frac{a_4}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

    où a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 sont cinq réels que l'on précisera.

13. Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R}^* \mapsto f\left(\dfrac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}$ se prolonge en une fonction continue notée F, puis prouver que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Étude d'une suite

14. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation

$$f(x) = \frac{n+1}{n}$$

    admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$. On la note u_n.

On définit ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ que l'on va étudier dans les questions qui suivent.

15. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
16. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.
17. Grâce à la question 12, déterminer un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$.

Problème 2 : que reste-t-il de vos polynômes ?

On rappelle le théorème de la division euclidienne pour les polynômes : si $U \in \mathbb{C}[X]$ et $V \in \mathbb{C}[X]$ deux polynômes avec $V \neq 0$, alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{C}[X]^2$ tel que :

$$U = VQ + R \quad \text{avec} \quad d^\circ R < d^\circ V$$

Les polynômes Q et R sont respectivement appelés le quotient et le reste de la division du polynôme U par V. Dans ce problème, on se donne un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un couple $(A, B) \in \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}[X]$ tel que $d^\circ B = n+1$. On considère également l'application φ définie sur $\mathbb{C}_n[X]$ qui à un polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ associe le reste de la division euclidienne de AP par B. Par exemple, si on suppose que l'on a :

$$n = 2, \quad A = X^2, \quad B = X^3 - X, \quad P = X^2 + X + 1$$

Alors en effectuant la division euclidienne de AP par B, on obtient :

$$AP = X^4 + X^3 + X^2 = BQ + R \quad \text{avec} \quad Q = X + 1 \quad \text{et} \quad R = 2X^2 + X$$

donc on a $\varphi(P) = 2X^2 + X$

Généralités sur l'application φ

Dans cette partie, on démontre que l'application φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

1. Justifier que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.

On considère deux polynômes $P_1 \in \mathbb{C}_n[X]$ et $P_2 \in \mathbb{C}_n[X]$. Par le théorème de la division euclidienne rappelé dans la présentation, il existe $(Q_1, R_1) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ et $(Q_2, R_2) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ tels que :

$$AP_1 = BQ_1 + R_1 \qquad \text{et} \qquad AP_2 = BQ_2 + R_2$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Exprimer le quotient et le reste dans la division euclidienne de $A(P_1 + \lambda P_2)$ par B en fonction de λ et des polynômes Q_1, Q_2, R_1 et R_2 en justifiant votre réponse. En déduire que φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

Étude d'un premier exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que :

$$n = 2 \quad A = X^2 + 2X \quad \text{et} \quad B = X^3 + X^2 - X - 1$$

3. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de dans la base $(1, X, X^2)$ est :

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Montrer que la famille $(X^2 - 1, X^2 - X, 1 + 2X + X^2)$ est une base de $\mathbb{C}_2[X]$
5. Calculer, D, la matrice de φ dans cette base.
6. En déduire un lien entre K et D, puis calculer explicitement K^p (on exprimera les 9 coefficients de K^p) en fonction de p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Étude du cas où B est scindé à racines simples

Dans cette partie, on ne suppose plus que $n = 2$: le nombre n est un entier quelconque de $\mathbb{N}^*$ et on suppose que B est un polynôme scindé à racines simples. On note $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ les racines de B qui sont donc des nombres complexes distincts. On définit les polynômes de Lagrange $L_0, L_1, \ldots, L_n \in \mathbb{C}_n[X]$ associés aux points $x_0, \ldots, x_n$ par :

$$\forall k \in [\![0 ; n]\!], \qquad L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{X - x_i}{x_k - x_i}$$

En particulier, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\forall (k, j) \in [\![0 ; n]\!]^2, \quad L_k(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j = k \\ 0 & \text{si} \quad j \neq k \end{cases}$$

7. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Montrer que $x_0, \dots, x_n$ sont des racines du polynôme $Q = P - \sum_{k=0}^{n} P(x_k) L_k$
8. Déduire de la question précédente que pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on $P = \sum_{k=0}^{n} P(x_k) L_k$
9. Montrer que $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Pour tout entier $k \in [\![0\,;n]\!]$, on désigne respectivement par $Q_k \in \mathbb{C}[X]$ et $R_k \in \mathbb{C}_n[X]$ le quotient et le reste dans la division euclidienne de AL_k par B.

10. Soit $(j,k) \in [\![0\,;n]\!]^2$. Montrer que $R_k(x_j) = 0$ si $j \neq k$ et que $R_k(x_k) = A(x_k)$.
11. En utilisant la question 8, en déduire que pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, $\varphi(L_k) = A(x_k)L_k$
12. En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{C}_n[X]$ tel que la matrice de φ dans cette base soit diagonale.

Étude d'un second exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 2$ et que $B = X^3$. Comme A est un élément de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_2[X]$, il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que $A = \alpha + \beta X + \gamma X^2$

13. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $(1, X, X^2)$ est :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$$

14. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, calculer T^p.

On remarque que si $\beta = \gamma = 0$, c'est-à-dire si le polynôme A est constant, alors la matrice est diagonale. Si $(\beta, \gamma) \neq (0,0)$, alors, non seulement, T n'est pas diagonale, mais en plus on va montrer dans la suite qu'on ne peut pas la diagonaliser c'est-à-dire qu'on ne peut pas la mettre sous la forme $T = PDP^{-1}$ avec P inversible et D une matrice diagonale. Pour cela, fixons donc $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ et supposant qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ et D une matrice diagonale telle que $T = PDP^{-1}$

15. Sachant que T est la matrice de φ dans la base canonique. Dire qui est D par rapport à φ.
16. En déduire qu'il existe trois polynômes P_1, P_2, P_3 et trois scalaires d_1, d_2 et d_3 tels que pour tout $i \in [\![1\,;3]\!]$, $\varphi(P_i) = d_i P_i$.
17. En déduire que pour $i \in [\![1\,;3]\!]$, $\varphi - d_i \mathrm{Id}_{\mathbb{C}_2[X]}$ n'est pas bijective.
18. Trouver les valeurs possibles de d_1, d_2, d_3 et conclure.

Exercice facultatif (à faire que si vous avez traité une large partie des deux premiers problèmes)

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.

1. Soit $i \in [\![1\,;n]\!]$, justifier qu'il existe une unique $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ tel que pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, $\varphi(e_j) = \delta_{i,j}$. On note e_i^* la fonction φ
2. Montrer que $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ est une base de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$
3. Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$, montrer qu'il existe $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E telle que pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$, $\varphi_i(e_j) = \delta_{i,j}$