Révision 6 (fonctions)

1. Calculer les dérivées de $x \mapsto \cos^5(x)\sin(x)$ et de $x \mapsto \sqrt{1+\cos^2(\mathrm{e}^x)}$ (après avoir justifié la dérivabilité).
2. Calculer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}$.
   On pourra poser le changement de variable $u = \sqrt{1+\mathrm{e}^{2t}}$.
3. (a) Résoudre l'équation différentielle $y'(x) + \dfrac{1}{x}y(x) = 0$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
   (b) Donner une base de l'ensemble des solutions.
   (c) Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y'(x) + \dfrac{1}{x}y(x) & = & \cos(x) \\ y(\pi) & = & 1 \end{cases}$ sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$.
4. (a) Calculer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de $x \mapsto \mathrm{e}^{\sin(x)}$.
   (b) En déduire l'équation de la tangente de cette fonction en 0,
   (c) En déduire également la position de la courbe par rapport à cette asymptote au voisinage de 0.
   (d) En déduire aussi les dérivées n-ièmes de $x \mapsto \mathrm{e}^{\sin(x)}$ en 0 pour $n \in [\![\,0\,;5\,]\!]$.
5. Quelle est la limite de $\left(\dfrac{x-3}{x-2}\right)^x$ quand $x \to +\infty$?
6. Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$.
7. À l'aide d'un développement asymptotique, étudier l'asymptote de $x \mapsto \sqrt{x^2+2x+2}$ en $+\infty$ ainsi que la position de la courbe par rapport à cette asymptote.
8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $f_n : \begin{cases} [\,0\,;1\,] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 - \dfrac{x}{2} - x^n \end{cases}$.
   (a) Montrer qu'il existe un unique $x_n \in [\,0\,;1\,]$, tel que $f_n(x_n) = 0$.
   (b) Montrer que $f_{n+1}(x_n) > 0$.
   (c) Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone puis convergente.
   (d) En notant ℓ sa limite, justifier que $\ell \in [\,0\,;1\,]$.
   (e) En supposant que $\ell < 1$ et en calculant la limite de $({x_n}^n)$, obtenir une contradiction et la valeur de ℓ.
9. On pose, pour $x \geqslant 0$, $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$.
   (a) Démontrer que f est k-lipschitzienne sur $[\,0\,;+\infty\,[$ avec un certain k à déterminer.
   (b) Définissons une suite $(u_n)_n$ par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Étudier la convergence de $(u_n)_n$ et déterminer sa limite si celle-ci existe.