Révision 7 (algèbre linéaire)

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (5x + y, x + 5y) \end{cases}$ et $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer le noyau de f. Que peut-on en déduire sur f ?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f - 6\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ ainsi qu'une base de $\mathrm{Ker}(f - 4\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ (on résoudra un système linéaire).
4. Démontrer que ces deux noyaux sont supplémentaires.
5. Démontrer que la concaténation des deux bases trouvées à la question 3, notée $\mathscr{B}'$, est une base de $\mathbb{R}^2$.
6. Déterminer $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.
7. Déterminer $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$.
8. Donner une relation entre A et D puis en déduire un calcul explicite de A^p pour $p \in \mathbb{N}$.
9. Déterminer l'expression de la projection sur $\mathrm{Ker}(f - 6\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f - 4\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$, notée p, ainsi que la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(f - 6\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f - 4\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$, notée s.
10. Déterminer $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p)$ et $C = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s)$. Puis sans aucun calcul, donner la valeur de B^2 et C^2.
11. Déterminer également, sans aucun calcul, $B' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(p)$ et $C' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(s)$