

Révision 7 (algèbre linéaire)

Soit $f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (5x + y, x + 5y) \end{cases}$ et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\lambda(x, y) + (x', y')) &= f(\lambda x + x', \lambda y + y') = (5(\lambda x + x') + (\lambda y + y'), (\lambda x + x') + 5(\lambda y + y')) \\ &= (5\lambda x + 5x' + \lambda y + y', \lambda x + x' + 5\lambda y + 5y') \\ &= \lambda(5x + y, x + 5y) + (5x' + y', x' + 5y') = \lambda f(x, y) + f(x', y') \end{aligned}$$

De plus, $f(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

2. Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors :

$$\begin{aligned} u \in \text{Ker}(f) &\iff f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} 5x + y = 0 \\ x + 5y = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow_{L_1 \leftarrow L_1 - 5L_2} \begin{cases} -24y = 0 \\ x = -5y \end{cases} \\ &\iff x = y = 0 \iff u = (0, 0) \end{aligned}$$

Ainsi, $\text{Ker}(f) = \{(0, 0)\}$, on en déduit que f est injective, comme f est un endomorphisme en dimension finie, on en déduit que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

3. Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors :

$$\begin{aligned} u \in \text{Ker}(f - 6\text{Id}_{\mathbb{R}^2}) &\iff (f - 6\text{Id}_{\mathbb{R}^2})(x, y) = (0, 0) \iff f(x, y) - 6(x, y) = (0, 0) \\ &\iff (-x + y, x - y) = (0, 0) \iff \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \iff y = x \\ &\iff u = (x, x) = x(1, 1) \iff u \in \text{vect}((1, 1)) \end{aligned}$$

On en déduit que $\text{Ker}(f - 6\text{Id}_{\mathbb{R}^2}) = \text{vect}((1, 1))$. Ainsi, $((1, 1))$ est une famille génératrice de $\text{Ker}(f - 6\text{Id}_{\mathbb{R}^2})$, comme $(1, 1) \neq (0, 0)$, on en déduit que $((1, 1))$ est une base de $\text{Ker}(f - 6\text{Id}_{\mathbb{R}^2})$.

Procédons de même, soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors :

$$\begin{aligned} u \in \text{Ker}(f - 4\text{Id}_{\mathbb{R}^2}) &\iff (f - 4\text{Id}_{\mathbb{R}^2})(x, y) = (0, 0) \iff f(x, y) - 4(x, y) = (0, 0) \\ &\iff (x + y, x + y) = (0, 0) \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \iff y = -x \\ &\iff u = (x, -x) = x(1, -1) \iff u \in \text{vect}((1, -1)) \end{aligned}$$

On en déduit que $\text{Ker}(f - 4\text{Id}_{\mathbb{R}^2}) = \text{vect}((1, -1))$. Ainsi, $((1, -1))$ est une famille génératrice de $\text{Ker}(f - 4\text{Id}_{\mathbb{R}^2})$, comme $(1, -1) \neq (0, 0)$, on en déduit que $((1, -1))$ est une base de $\text{Ker}(f - 4\text{Id}_{\mathbb{R}^2})$.

4. Soit $(x, y) \in \text{Ker}(f - 6\text{Id}_{\mathbb{R}^2}) \cap \text{Ker}(f - 4\text{Id}_{\mathbb{R}^2})$, alors $f(x, y) = 6(x, y)$ et $f(x, y) = 4(x, y)$, par différence, $2(x, y) = (0, 0)$, ainsi $(x, y) = (0, 0)$. Dès lors, $\text{Ker}(f - 6\text{Id}_{\mathbb{R}^2}) \cap \text{Ker}(f - 4\text{Id}_{\mathbb{R}^2}) \subset \{(0, 0)\}$, comme l'inclusion réciproque est toujours vraie, on en déduit que la somme est directe. De plus, en utilisant le cardinal des bases trouvées à la question précédente :

$$\dim(\text{Ker}(f - 6\text{Id}_{\mathbb{R}^2})) + \dim(\text{Ker}(f - 4\text{Id}_{\mathbb{R}^2})) = 1 + 1 = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$$

D'après le cours, on peut en déduire que ces deux noyaux sont bien supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

5. La concaténation de deux bases de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$ est, d'après le cours, une base de $\mathbb{R}^2$. Notons $e'_1 = (1, 1)$ et $e'_2 = (1, -1)$ ainsi $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$, est une base de $\mathbb{R}^2$ et même adaptée à $\mathbb{R}^2 = \text{Ker}(f - 6\text{Id}_{\mathbb{R}^2}) \oplus \text{Ker}(f - 4\text{Id}_{\mathbb{R}^2})$.

6. Posons $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ les vecteurs de la base canonique, ainsi :

- $f(e_1) = f(1, 0) = (5, 1) = 5(1, 0) + 1(0, 1) = 5e_1 + 1e_2$
- $f(e_2) = f(0, 1) = (1, 5) = 1(1, 0) + 5(0, 1) = 1e_1 + 5e_2$

Ainsi, $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

7. Décomposons $f(e'_1)$ et $f(e'_2)$ dans la base $\mathcal{B}'$:

- $f(e'_1) = f(1, 1) = (6, 6) = 6(1, 1) + 0(1, -1) = 6e'_1 + 0e'_2$
- $f(e'_2) = f(1, -1) = (4, -4) = 0(1, 1) + 4(1, -1) = 0e'_1 + 4e'_2$

Ainsi, $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

8. D'après la formule de changement de base, $A = PDP^{-1}$, avec $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$, comme $\mathcal{B}' = ((1, 1), (1, -1))$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. De plus, pour tout ¹ $p \in \mathbb{N}$,

$$A^p = PD^pP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6^p & 0 \\ 0 & 4^p \end{pmatrix} \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6^p + 4^p & 6^p - 4^p \\ 6^p - 4^p & 6^p + 4^p \end{pmatrix}$$

Remarque 1. Notons que si $p = -1$ (ou si $p \in \mathbb{Z}_-$), la formule donnée est encore vraie, car $D^p = \begin{pmatrix} 6^p & 0 \\ 0 & 4^p \end{pmatrix}$, est vraie aussi si $p = -1$ (ou si $p \in \mathbb{Z}_-$).

9. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors comme $\mathcal{B}'$ est une base, il existe un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$(x, y) = \alpha e'_1 + \beta e'_2 = (\alpha + \beta, \alpha - \beta)$$

par identification $x = \alpha + \beta$, et $y = \alpha - \beta$. Alors par demi-somme et demi-différence, $\alpha = (x+y)/2$ et $\beta = (x-y)/2$, ainsi

$$(x, y) = \frac{x+y}{2}e'_1 + \frac{x-y}{2}e'_2 \quad \text{avec} \quad \frac{x+y}{2}e'_1 \in \text{Ker}(f - 6\text{Id}_{\mathbb{R}^2}) \quad \text{et} \quad \frac{x-y}{2}e'_2 \in \text{Ker}(f - 4\text{Id}_{\mathbb{R}^2})$$

ainsi,

$$p(x, y) = \frac{(x+y)}{2}e'_1 = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2} \right) \quad \text{et} \quad s(x, y) = \frac{x+y}{2}e'_1 - \frac{x-y}{2}e'_2 = (y, x)$$

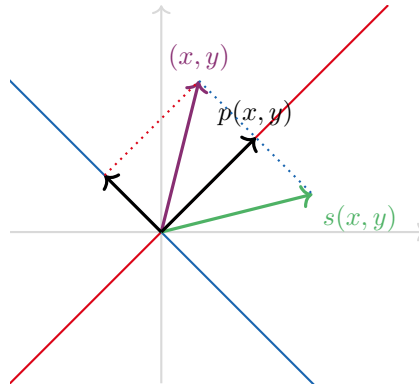


FIGURE 1 – En rouge le noyau de $f - 6\text{Id}_{\mathbb{R}^2}$, en bleu le noyau de $f - 4\text{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

10. • $p(e_1) = p(1, 0) = (1/2, 1/2) = \textcolor{red}{1}/2(1, 0) + \textcolor{red}{1}/2(0, 1)$
 • $p(e_2) = p(0, 1) = (1/2, 1/2) = \textcolor{blue}{1}/2(1, 0) + \textcolor{blue}{1}/2(0, 1)$

Ainsi, $B = \begin{pmatrix} \textcolor{red}{1}/2 & \textcolor{blue}{1}/2 \\ \textcolor{red}{1}/2 & \textcolor{blue}{1}/2 \end{pmatrix}$. De même,

- $s(e_1) = p(1, 0) = (0, 1) = \textcolor{red}{0}(1, 0) + \textcolor{red}{1}(0, 1)$
 • $s(e_2) = s(0, 1) = (1, 0) = \textcolor{blue}{1}(1, 0) + \textcolor{blue}{0}(0, 1)$

Ainsi, $C = \begin{pmatrix} \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{1} \\ \textcolor{blue}{1} & \textcolor{blue}{0} \end{pmatrix}$. Comme $p \circ p = p$, $B^2 = B$ et comme $s \circ s = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$, $C^2 = I_2$ (ce qu'un calcul matriciel confirme).

11. $p(e'_1) = e'_1 = 1e'_1 + 0e'_2$, $p(e'_2) = 0 = 0e'_1 + 0e'_2$, $s(e'_1) = e'_1 = 1e'_1 + 0e'_2$, $s(e'_2) = -e'_2 = 0e'_1 + (-1)e'_2$, ainsi $B' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $C' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Remarque 2. D'après la formule de changement de base, $B = PB'P^{-1}$ et $C = PC'P^{-1}$.

1. Je vous conseille de vérifier la cohérence de vos calculs avec $p = 0$ et $p = 1$.