Révision 8 (complexes, polynômes, sommes, produits)

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note $\omega = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}}$.

1. Donner l'expression des racines n-ièmes de 1 à l'aide de ω.
2. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Démontrer que $|z| = 1$ si et seulement si $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$.
3. Soit $k \in [\![0\,;n-1]\!]$. Déterminer $r \in [\![0\,;n-1]\!]$ tel que $\overline{\omega^k} = \omega^r$.
4. Calculer $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \omega^k$ et $P_n = \prod\limits_{k=0}^{n-1} \omega^k$.
5. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \sin\left(k\dfrac{2\pi}{n}\right)$.

On considère les polynômes $P = \sum\limits_{k=1}^{n} kX^{k-1}$ et $Q = \sum\limits_{k=1}^{n} X^k$

6. Pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, calculer $Q(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} x^k$
7. Donner une relation entre P et Q.
8. En déduire que, pour tout réel x différent de 1, $P(x) = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$
9. En déduire que les polynômes $(X-1)^2 P(X)$ et $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ sont égaux.
10. Montrer que, pour tout $k \in [\![1\,;n-1]\!]$, $P\left(\omega^k\right) = \dfrac{n}{\omega^k - 1}$.
11. En factorisant $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$, montrer que $\prod\limits_{k=1}^{n-1}\left(1-\omega^k\right) = n$.