

Révision 8 (complexes, polynômes, sommes, produits)

1. Les racines n -ièmes de 1 sont les n nombres complexes $e^{ik\frac{2\pi}{n}} = \omega^k$ pour $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ (en utilisant la formule de Moivre).

2. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Comme l'application $\begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$ est injective, on a :

$$|z| = 1 \iff |z|^2 = 1 \iff z\bar{z} = 1 \iff \bar{z} = \frac{1}{z}$$

Ainsi $|z| = 1$ si et seulement si $\bar{z} = \frac{1}{z}$

3. Soit $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, comme ω est une racine n -ième de 1, $\overline{\omega^k} = \frac{1}{\omega^k} = \frac{\omega^n}{\omega^k} = \omega^{n-k}$.

- Si $k = 0$, on a $\overline{\omega^k} = \omega^0$.
- Si $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, $\overline{\omega^k} = \omega^r$ avec $r = n - k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$.

Ainsi, pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, il existe $r \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ tel que $\overline{\omega^k} = \omega^r$, avec $r = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0 \\ n - k & \text{si } k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket \end{cases}$

4. Proposons deux méthodes :

- $\omega^0, \omega^1, \dots, \omega^{n-1}$ sont les racines du polynôme $X^n - 1$, donc d'après les relations coefficients-racines d'un polynôme scindé de degré n :
 - La somme des racines est l'opposé du coefficient en X^{n-1} divisé par le coefficient dominant, donc ici $S_n = \frac{0}{1}$
 - Le produit des racines est $(-1)^n$ fois le coefficient constant divisé par le coefficient dominant donc ici $P_n = (-1)^n \frac{-1}{1} = (-1)^{n+1}$
- — $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega} = 0$ (somme des termes d'une suite géométrique de raison $\omega \neq 1$ et $\omega^n = 1$)
- $P_n = \prod_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2\pi(n-1)}{n} \frac{n}{2}} = e^{i\pi(n-1)} = (e^{i\pi})^{n-1} = (-1)^{n-1}$ (somme des termes d'une suite arithmétique)

5. Comme la fonction $z \mapsto \text{Im}(z)$ est une application linéaire (en voyant $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel),

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(k\frac{2\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \text{Im}\left(e^{i\frac{k2\pi}{n}}\right) = \text{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k\right) = \text{Im}(0) = 0$$

6. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, alors en utilisant la somme des termes d'une suite géométrique de raison $x \neq 1$, $\sum_{k=1}^n x^k = x \frac{1 - x^n}{1 - x}$

7. $Q' = P$.

8. Comme

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad Q(x) = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$$

Donc en dérivant, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad P(x) = Q'(x) = \frac{(1 - (n+1)x^n)(1 - x) + (x - x^{n+1})}{(1 - x)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x - 1)^2}$$

9. La question précédente montre que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $(x - 1)^2 P(x) - (nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1) = 0$. Ainsi, $(X - 1)^2 P(X) - (nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1)$ a une infinité de racines (tous les réels différents de 1), c'est donc le polynôme nul, ainsi $(X - 1)^2 P(X) = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$.

10. Pour $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, ω^k est une racine n -ième de l'unité différente de 1. Ainsi,

$$P(\omega^k) = \frac{n(\omega^k)^{n+1} - (n+1)(\omega^k)^n + 1}{(\omega^k - 1)^2} = \frac{n\omega^k - (n+1) + 1}{(\omega^k - 1)^2} = \frac{n(\omega^k - 1)}{(\omega^k - 1)^2} = \frac{n}{\omega^k - 1}$$

11. Les complexes $\omega^0, \omega^1, \dots, \omega^{n-1}$ sont les racines du polynôme unitaire $X^n - 1$ et elles sont toutes distinctes, ainsi :

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega^k) = (X - 1) \prod_{k=1}^{n-1} (X - \omega^k)$$

De plus, en utilisant la factorisation de $A^n - B^n$ par $A - B$:

$$X^n - 1 = X^n - 1^n = (X - 1) \sum_{k=0}^{n-1} X^k 1^{n-1-k} = (X - 1) \sum_{k=0}^{n-1} X^k$$

Ainsi, $(X - 1) \left[\sum_{k=0}^{n-1} X^k - \prod_{k=1}^{n-1} (X - \omega^k) \right] = 0$. Or, $\mathbb{C}[X]$ est intègre et $X - 1 \neq 0$, par conséquent

$$\prod_{k=1}^{n-1} (X - \omega^k) = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$$

En évaluant en 1, on obtient : $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega^k) = n$.