Révision 9 (algèbre linéaire 2)

La question 15 est plus technique et ne fait pas vraiment partie des révisions.

Soit $f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto (5x + y + 6z, x + 5y + 6z, 6x + 6y + 12z) \end{cases}$ et $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On admet que f est un endomorphisme[1] de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer A, la matrice de f dans la base canonique.
2. Que vaut le déterminant de f ? Que peut-on en déduire sur f et sur A ?
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$. Calculer $P(\lambda)$, en déduire que P est une fonction polynômiale et trouver ses racines.
   On pourra effectuer $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$.
4. Calculer le rang de A, le rang $A - 4I_3$ et celui de $A - 18I_3$. En déduire la dimension de $\text{Ker}(A)$ de $\text{Ker}(A - 4I_3)$ et de $\text{Ker}(A - 18I_3)$.
5. Déterminer une base de $\text{Ker}(A)$, une base de $\text{Ker}(A - 4I_3)$, ainsi qu'une base de $\text{Ker}(A - 18I_3)$.
   Il est conseillé de ne pas chercher forcément à résoudre un système linéaire, mais chercher des vecteurs dans les noyaux en exhibant une relation entre les colonnes des matrices concernées.
6. À l'aide d'un calcul de déterminant, démontrer que la concaténation des trois bases trouvées à la question précédente, notée $\mathscr{B}'$, est une base de $\mathbb{R}^3$.
7. Démontrer à nouveau que la famille $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ mais, cette fois-ci, sans utiliser le déterminant.
8. Déterminer $D = \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$.
9. Déterminer explicitement P, la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Déterminer aussi explicitement la matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$.
10. Donner une relation entre A et D puis en déduire un calcul explicite de A^p pour $p \in \mathbb{N}$.
11. On note $C(D)$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec D. Démontrer que $C(D)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $C(D)$.
12. Proposer une matrice Δ tel que $\Delta^2 = D$.
13. En déduire une matrice R tel que $R^2 = A$ (on dit que R est une racine carrée de A).
    Exprimer R en fonction de P et P^{-1} sans chercher à calculer explicitement R.
14. Combien de racines carrées de A pouvez-vous trouver ?
    De même, ne pas calculer explicitement ces matrices, les laisser sous forme de produit matriciel.

Le but de la question 15 est de montrer que ces quatre matrices sont bien deux à deux différentes et que ce sont les seules possibles.

15. (a) Pour $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$, on définit la trace de M, par

$$\text{tr}(M) = \sum_{k=1}^{3} m_{k,k} = m_{1,1} + m_{2,2} + m_{3,3}$$

    Démontrer que, pour tout $(M, N) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})^2$, $\text{tr}(MN) = \text{tr}(NM)$.

    (b) En déduire que si deux matrices B et B' sont semblables, alors $\text{tr}(B') = \text{tr}(B')$.

    On va maintenant prouver que les quatre racines carrées trouvées à la question 14 sont bien toutes différentes.

    (c) Que valent les traces des quatre racines carrées de A trouvées à la question 14 ? En déduire que ces quatre matrices sont bien deux à deux distinctes.

    On va maintenant prouver que seules les quatre matrices trouvées sont possibles. Soit R une racine carrée de A quelconque. On a donc $R^2 = A$, et on pose $\Delta = P^{-1}RP$.

    (d) Calculer Δ^2.

    (e) Démontrer que Δ et D commutent.

    (f) En déduire les valeurs possibles de Δ et conclure sur le nombre exact des racines carrées de A.

1. Car similaire à la feuille de révision 7, mais si vous n'êtes pas au point, montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.