Devoir maison 5 à rendre le mardi 6 mai 2025

Exercice : soyez sans limite en analyse asymptotique

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+\sin(x)}}$
2. Considérons la fonction $f\colon x \mapsto \sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$. En utilisant un développement asymptotique, déterminer les asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$ de f ainsi que la position des asymptotes par rapport à f.
3. Déterminer la limite de $\left(\left(\dfrac{n}{n-5/2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Déterminer la tangente de $x \mapsto \sqrt{\tan(x)}$ en $\dfrac{\pi}{3}$, ainsi que la position de cette fonction par rapport à sa tangente.

Problème : les noyaux grandissent jusqu'à atteindre l'âge adulte

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $f \in \mathscr{L}(E)$ on dit que f est nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = 0$. Si p est le plus petit entier naturel vérifiant $f^p = 0$, alors $f^{p-1} \neq 0$ et on dit que f est nilpotent d'ordre p. Les questions 10, 11, 13, 14, 17, 18 et 19 sont facultatives (sauf si vous visez une étoile bien sûr).

Étude d'un exemple

Pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on pose $g(P) = (P(0) - P'(0))(1+X) + P''(0)X^2 + P'''(0)(X^2+X^3)$.

1. Vérifier que $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X])$.
2. Déterminer A, la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Calculer $g \circ g$ ainsi que sa matrice.
4. Calculer une base de $\mathrm{Ker}(g)$ et de $\mathrm{Im}(g)$. A-t-on $\mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}_3[X]$?
5. De même, calculer $\mathrm{Ker}(g^2)$ et $\mathrm{Im}(g^2)$. A-t-on $\mathrm{Ker}(g^2) \oplus \mathrm{Im}(g^2) = \mathbb{R}_3[X]$?
6. Dans le cas où $\mathrm{Ker}(g^2) \oplus \mathrm{Im}(g^2) = \mathbb{R}_3[X]$, déterminer la projection sur $\mathrm{Ker}(g^2)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(g^2)$.

Cas théorique : étude des noyaux et images itérés

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathscr{L}(E)$.

7. Soit $k \in \mathbb{N}$, montrer que $\mathrm{Ker}(f^k) \subset \mathrm{Ker}(f^{k+1})$ ainsi que $\mathrm{Im}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(f^k)$.
8. On suppose qu'il existe un entier r tel que $\mathrm{Ker}(f^{r+1}) = \mathrm{Ker}(f^r)$. Montrer que pour tout entier $k \geqslant r$, $\mathrm{Ker}(f^{k+1}) = \mathrm{Ker}(f^k)$.
   Indication : écrire $k = r + a$ avec $a \in \mathbb{N}$.

Ainsi, pour tout $k \geqslant r$, $\mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^r)$.

9. Démontrer alors que pour tout $k \geqslant r$, $\mathrm{Im}(f^k) = \mathrm{Im}(f^r)$.
10. Soit $(u_n)_n$ une suite d'entiers convergente. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est stationnaire.
11. En considérant la suite $(\dim(\mathrm{Ker}(f^k)))_{k\in\mathbb{N}}$, montrer qu'un tel r existe.

Le plus petit entier r à vérifier cette propriété s'appelle l'indice de Fitting de f.

12. Montrer alors que $\mathrm{Ker}(f^r) \oplus \mathrm{Im}(f^r) = E$.
13. Montrer que $f_{\mathrm{Ker}(f^r)}\colon \begin{cases} \mathrm{Ker}(f^r) \longrightarrow \mathrm{Ker}(f^r) \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$ est bien définie et que c'est un endomorphisme nilpotent dont on déterminera l'ordre de nilpotence.
14. Montrer que $f_{\mathrm{Im}(f^r)}\colon \begin{cases} \mathrm{Im}(f^r) \longrightarrow \mathrm{Im}(f^r) \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$ est bien définie et que c'est un automorphisme.

Étude d'un endomorphisme nilpotent

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'ordre p.

15. Justifier qu'il existe $x \in E$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0_E$ et montrer proprement que $\mathscr{F} = (x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est une famille libre. En déduire une inégalité entre p et n.
16. On suppose que $p = n$, en justifiant que $\mathscr{F}$ est une base de E, écrire la matrice de f dans cette base.
17. Toujours si $p = n$, quel est l'indice de Fitting de f ?

Étude d'un endomorphisme en dimension infinie

Dans cette partie, on considère $E = \mathbb{K}[X]$ et l'endomorphisme $D\colon \begin{cases} \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X] \\ \quad P \quad \longmapsto P' \end{cases}$ (on ne demande pas de vérifier que c'est un endomorphisme).

18. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ker}(D^k)$ et $\mathrm{Im}(D^k)$.
19. Existe-t-il $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}(D^k) = \mathrm{Ker}(D^{k+1})$?