DS8

17 mai 2025

La calculatrice est interdite. L'usage de tout document est interdit. La rigueur, le soin, la présentation seront fortement pris en compte dans la notation. Les résultats de chaque question seront encadrés. Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre qui vous plaît, mais veuillez bien indiquer le numéro de l'exercice.

Pot-pourri de calculs

On considère $f\colon x \mapsto \mathrm{e}^{\cos(x)}$

1. Calculer le développement limité à l'ordre 6 de f en 0.
2. En déduire la dérivée d'ordre 6 en 0 de f.
3. Calculer le déterminant de $M = \begin{pmatrix} x & 0 & y & x \\ y & y & 0 & x \\ x & x & 0 & y \\ y & y & y & x \end{pmatrix}$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sous forme factorisée.

On considère $X \sim \mathscr{U}(\llbracket 1\,;4 \rrbracket)$ et on pose $Y = (X-2)^4$.

4. Calculer la loi de Y.
5. Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Plus précisément, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1\,;n \rrbracket^2$ $a_{i,i} = a_{n,j} = a_{i,n} = 1$ et tous les autres coefficients sont nuls. Calculer $\det(A_n)$.

On considère 10 boules numérotées de 1 à 10, on effectue un tirage simultanée de trois boules.

7. Combien y a-t-il de tels tirages ? (une valeur numérique est attendue)
8. Combien y a-t-il de tels tirages avec au moins un nombre pair ?

Un exercice d'actualité

Soit $a \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ fixé. Dans cet exercice, on considère que des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

1. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, on pose $f(x, y) = (x+y, ay)$, montrer que $f\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ est un endomorphisme.
2. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{C}^2$. Déterminer C la matrice de f dans $\mathscr{B}$.
3. Montrer que $\mathscr{B}' = ((1,0),(1,a-1))$ est une base de $\mathbb{C}^2$ et déterminer la matrice de f dans $\mathscr{B}'$.
4. En faisant le lien entre les deux matrices de f, calculer C^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

On considère $n \in \mathbb{N}^*$. On se fixe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, et pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\phi_A(M) = AM$, ainsi $\phi_A\colon \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

5. Montrer que, pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, l'application $\phi_A\colon \begin{cases} \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \\ \quad M \quad\longmapsto AM \end{cases}$ est une application linéaire.
6. Montrer que, pour tout $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$, $\phi_{AB} = \phi_A \circ \phi_B$.
7. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Déduire de la question précédente que ϕ_A est un automorphsime si et seulement si la matrice A est inversible.
   Indication : si ϕ_A est un automorphisme, on pourra considérer un antécédent par ϕ_A de la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Dans les questions 8 à 16, on considère le cas particulier où $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ toujours avec $a \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$.

8. Déterminer F la matrice de ϕ_A dans la base $\mathscr{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$
9. En calculant le déterminant de $F - zI_4$, déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tel que $F - zI_4$ ne soit pas inversible.
10. Déterminer le rang de $F - I_4$ et celui de $F - aI_4$.
11. Rappeler l'énoncé du théorème du rang appliquée à une matrice $G \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

12. Déterminer une base du noyau $F - I_4$ et une base du noyau de $F - aI_4$.
13. En déduire une base du noyau de $\phi_A - \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{C})}$ et une base de $\phi_A - a\mathrm{Id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{C})}$.
14. À l'aide d'un déterminant, montrer que $\mathscr{C}' = \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ a-1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & a-1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.
15. Déterminer la matrice de ϕ_A dans la base $\mathscr{C}'$.
16. Donner une relation entre les deux matrices de ϕ_A (on introduira proprement les objets nécessaires).
17. On reprend $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ quelconque, déterminer le déterminant de l'endomorphisme ϕ_A en fonction du déterminant de la matrice A.

Encore un exercice de boules et billes

Une urne contient n billes roses (en hommage aux Barbaprépa) et une verte toutes indiscernables avec $n \geqslant 2$. On tire successivement et sans remise les $n+1$ billes. Pour $k \in [\![1\,; n+1]\!]$, on note R_k l'évènement «on a tiré une bille rose lors du k-ième tirage». On note $(\Omega, \mathbb{P})$ l'espace probabilisé modélisant la situation.

1. Calculer la probabilité de R_1.
2. Énoncer précisément la formule des probabilités totales (hypothèses et conclusion)
3. Calculer la probabilité de R_2.
   Indication : qu'est-ce qui a bien pu se passer au premier tirage ?
4. Calculer la probabilité de R_1 sachant l'évènement R_2.
5. Les évènements $R_1, R_2, \ldots, R_{n+1}$ sont-ils indépendants ?

On note X la variable aléatoire indiquant lors de quel tirage on a tiré la bille verte, alors $X(\Omega) = [\![1\,; n+1]\!]$.

6. Soit $j \in [\![1\,; n+1]\!]$ écrire l'évènement $(X = j)$ à l'aide des évènements R_1, $R_2, \ldots, R_{n+1}$.
7. Énoncer la formule des probabilités composées.
8. Déterminer la loi de X.

Un exercice mortel pour les tueurs/tueuses

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilité, on suppose qu'il existe $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des évènements indépendants et que pour tout $k \in [\![1\,; n]\!]$, $0 < \mathbb{P}(A_k) < 1$, montrer que Ω contient au moins 2^n éléments.