Proba

1. $(X > k-1) = (X = k) \cup (X > k)$, en effet comme X prend des valeurs entières $(X > k-1) = (X \geqslant k)$ et $(X \geqslant k) = (X = k) \cup (X > k)$ et cette union est disjointe.
2. Comme $(X > k-1) = (X = k) \cup (X > k)$ et que cette union est disjointe, $\mathbb{P}(X > k-1) = \mathbb{P}(X = k) + \mathbb{P}(X > k)$, ainsi, $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k)$
3. Comme X est à valeurs dans $[\![0\,; n]\!]$, par définition de l'espérance, $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k)$, comme le terme pour $k = 0$ est nul, on a en utilisant la question précédente,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} k(\mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k)) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X > k-1) - \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X > k)\\ &\underset{j=k-1}{=} \sum_{j=0}^{n-1}(j+1)\mathbb{P}(X > j) - \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X > k) = \sum_{k=0}^{n}(k+1)\mathbb{P}(X > k) - \sum_{k=0}^{n-1} k\mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n)\\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n)\end{aligned}$$

Or, comme X prend ses valeurs dans $[\![0\,; n]\!]$, $\mathbb{P}(X > n) = 0$, on obtient donc le résultat.

4. Considérons $f\colon x \mapsto x^p$, f est continue sur $[\,0\,;1\,]$, d'après le théorème des sommes de Riemann, $u_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{p+1}$, ainsi, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{p+1}$.
5. Comme il y a remise, au moment d'effectuer le i-ième tirage, il y a les n billes, ainsi, Y_i suite une loi uniforme sur $[\![1\,; n]\!]$, donc $\mathbb{E}(Y_i) = \dfrac{n+1}{2}$ et $\mathbb{V}(Y_i) = \dfrac{n^2-1}{12}$.
6. Soit $k \in [\![1\,; n]\!]$, alors $(X_n \leqslant k) = \bigcap\limits_{i=1}^{p}(Y_i \leqslant k)$, or $Y_1, \ldots, Y_n$ sont des variables aléatoires indépendantes (tirages avec remise), donc $\mathbb{P}(X_n \leqslant k) = \prod\limits_{i=1}^{p} \mathbb{P}(Y_i \leqslant k)$. De plus, pour $i \in [\![1\,; p]\!]$, $(Y_i \leqslant k) = \bigcup\limits_{j=1}^{k}(Y_i = j)$ et l'union est disjointe, donc $\mathbb{P}(Y_i \leqslant k) = \sum\limits_{j=1}^{k} \mathbb{P}(Y_i = j) = \sum\limits_{j=1}^{k} \dfrac{1}{n} = \dfrac{k}{n}$, ainsi, $\mathbb{P}(X_n \leqslant k) = \left(\dfrac{k}{n}\right)^p$
7. D'après la question 3 et la question 6,

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_n > k) = \sum_{k=0}^{n-1} (1 - \mathbb{P}(X_n \leqslant k)) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p = n - nu_n = n(1-u_n)$$

8. Comme $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{p+1}$, $1 - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{p}{p+1}$, comme $\dfrac{p}{p+1} \neq 0$, $1 - u_n \sim \dfrac{p}{p+1}$, par produit d'équivalent, $\mathbb{E}(X_n) = n(1-u_n) \sim \dfrac{pn}{p+1}$.
9. Soit $k \in [\![1\,; n]\!]$, d'après la question 2 et la question 6 :

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X_n > k-1) - \mathbb{P}(X_n > k) = (1 - \mathbb{P}(X_n \leqslant k-1)) - (1 - \mathbb{P}(X_n \leqslant k)) = \left(\frac{k}{n}\right)^p - \left(\frac{k-1}{n}\right)^p$$

Problème

1. Les solutions de l'équation homogène $y' + y = 0$ sont $x \mapsto C\mathrm{e}^{-x}$ où $C \in \mathbb{R}$. Utilions la méthode de la variation de la constante. Posons $y_p\colon x \mapsto C(x)\mathrm{e}^{-x}$ avec C une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad y_p'(x) + y_p(x) = \left(-C(x)\mathrm{e}^{-x} + C'(x)\mathrm{e}^{-x}\right) + C(x)\mathrm{e}^{-x} = C'(x)\mathrm{e}^{-x}$$

Ainsi, y_p est une solution particulière ssi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $C'(x)\mathrm{e}^{-x} = -x$ ssi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $C'(x) = -x\mathrm{e}^{x}$. Calculons donc **une** primitive de $x \mapsto -x\mathrm{e}^{x}$ par intégration par parties :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \int^x -t\mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t = \left[-t\mathrm{e}^{t}\right]^x - \int^x -\mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t = -x\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{x}$$

Dès lors $y_p : x \mapsto (-x\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{x})\mathrm{e}^{-x} = 1-x$ est une solution particulière. Les solutions de $y'(x)+y(x) = -x$ sont les fonctions $f : x \mapsto C\mathrm{e}^{-x} + 1 - x$ où $C \in \mathbb{R}$. Alors $f(0) = C + 1$, ainsi $f(0) = 1$ ssi $C = 0$. Dès lors, l'unique solution de l'équation différentielle avec la condition initiale $y(0) = 1$ est $x \mapsto 1 - x$.

2.
```python
def Factorielle(n):
    """Renvoie la factorielle de n, calculé de façon itérative"""
    p = 1
    for i in range(1,n+1):
        p = p*i
    return p

def Factorielle(n):
  """Renvoie la factorielle de n, calculé de façon récursive"""
    if n <= 1:
        return 1
    else:
        return n*Factorielle(n-1)
```

3.
   - $P_0 = \dfrac{X^0}{0!} - \dfrac{X^1}{1!} = 1 - X$
   - $P_1 = \dfrac{X^0}{0!} - \dfrac{X^1}{1!} + \dfrac{X^2}{2!} - \dfrac{X^3}{3!} = 1 - X + \dfrac{X^2}{2} - \dfrac{X^3}{6}$
   - $P_2 = \dfrac{X^0}{0!} - \dfrac{X^1}{1!} + \dfrac{X^2}{2!} - \dfrac{X^3}{3!} + \dfrac{X^4}{4!} - \dfrac{X^5}{5!} = 1 - X + \dfrac{X^2}{2} - \dfrac{X^3}{6} + \dfrac{X^4}{24} - \dfrac{X^5}{120}$
   - $P_3 = \dfrac{X^0}{0!} - \dfrac{X^1}{1!} + \dfrac{X^2}{2!} - \dfrac{X^3}{3!} + \dfrac{X^4}{4!} - \dfrac{X^5}{5!} + \dfrac{X^6}{6!} - \dfrac{X^7}{7!} = 1 - X + \dfrac{X^2}{2} - \dfrac{X^3}{6} + \dfrac{X^4}{24} - \dfrac{X^5}{120} + \dfrac{X^6}{720} - \dfrac{X^7}{5040}$

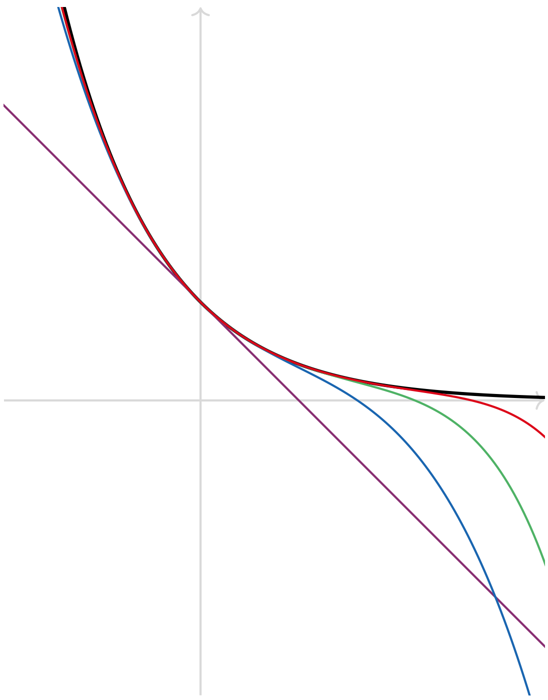

FIGURE 1 – En violet la coubre de P_0, en bleu la courbe de P_1, en vert la coubre de P_2, en rouge la courbe de P_3, en noir la courbe de $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$.

4.
```python
def P(x,n):
    S = 0
    for k in range(2*n + 2):
        S = S + ((-x)**(k))/Factorielle(k)#k-1 multiplications+k-1 multiplications+ 1 divisi
    return S
```

Cette fonction n'est pas optimale, car on recalcule à chaque fois les puissances de x et les factorielles. Donc le nombre de multiplications/divisions est un $\mathcal{O}(n^2)$. On peut être plus rapide en stockant en mémoire le coefficient $(-x)^k/k!$ et en remarquant que $\dfrac{(-x)^k}{k!} = \dfrac{(-x)^{k-1}}{(k-1)!} \times \dfrac{(-x)}{k}$.

```python
def P(x,n):
    p = 1#terme pour k=0
    S = p
    for k in range(1,2*n+2):
        p = -x*p/k#Une multiplication et une division
        S = S + p
    return S
```

Ainsi, le nombre de multiplications/divisions est en $\mathcal{O}(n)$.

5. $f\colon x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, par récurrence, pour tout $k \in [\![0\,; n+1]\!]$, $f^{(k)} = (-1)^k f$, $f^{(k)}(0) = (-1)^k$, d'après la formule de Taylor avec reste intégral $\mathrm{e}^{-x} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!} x^k + \displaystyle\int_0^x \dfrac{(x-t)^n}{n!} (-1)^{k+1} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$.
   - Si $x \geqslant 0$, par inégalité triangulaire puis croissance de l'intégrale,
   $$\left| \mathrm{e}^{-x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right| = \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} (-1)^{k+1} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \left| (-1)^{k+1} \mathrm{e}^{-t} \right| \mathrm{d}t$$
   $$\leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, \mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
   par encadrement, $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-x)^k}{k!} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-x}$.
   - Si $x \leqslant 0$, alors, en procédant de même, mais en mettant les bornes dans le «bon sens» :
   $$\left| \mathrm{e}^{-x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right| = \left| -\int_x^0 \frac{(x-t)^n}{n!} (-1)^{k+1} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_x^0 \left| \frac{(x-t)^n}{n!} (-1)^{k+1} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t \right|$$
   $$\leqslant \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!} \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-x}(-x)^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
6. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, en appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à exp, une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[0, x]$ $\mathrm{e}^x = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} + \displaystyle\int_0^x \dfrac{(x-t)^n}{n!} \exp^{(n+1)}(t)\, \mathrm{d}t$, or l'intégrande est positive, les bornes sont dans le «bon sens», ainsi, par positivité de l'intégrale, l'intégrale est positive et donc, $\mathrm{e}^x \geqslant \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$
7. Comme, pour tout $k \in [\![0\,; n]\!]$, $d^\circ P_k = 2k+1$, $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une famille de polynômes non nuls dont les degrés sont deux à deux distincts, ainsi $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est libre. Or, $\mathscr{B} = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une famille génératrice de $F = \mathrm{vect}\,(P_0, P_1, \dots, P_n)$. Ainsi, $\mathscr{B}$ est une base de F.
8. Soient $(P, Q) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors en utilisant la linéarité de la dérivée :
   $$\varphi(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q) + (\lambda P + Q)'' = \lambda P + Q + \lambda P'' + Q'' = \lambda(P + P'') + (Q + Q'') = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$$
   Donc φ est linéaire[1]. Soit $P \in F$: il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $P = aP_0 + bP_1 + cP_2 - dP_3$, comme φ est linéaire, $\varphi(P) = a\varphi(P_0) + b\varphi(P_1) + b\varphi(P_2) + d\varphi(P_3)$. Or :
   - $P_0 = 1 - X$, donc $P_0' = -1$ et $P_0'' = 0$
   - $P_1 = 1 - X + \dfrac{X^2}{2} - \dfrac{X^3}{6}$, $P_1' = -1 + X - \dfrac{X^2}{2}$ et $P_1'' = 1 - X = P_0$.
   - $P_2 = 1 - X + \dfrac{X^2}{2} - \dfrac{X^3}{6} + \dfrac{X^4}{24} - \dfrac{X^5}{120}$, $P_2' = -1 + X - \dfrac{X^2}{2} + \dfrac{X^3}{6} - \dfrac{X^4}{24}$ et $P_2'' = 1 - X + \dfrac{X^2}{3} - \dfrac{X^3}{6} = P_1$
   - $P_3 = 1 - X + \dfrac{X^2}{2} - \dfrac{X^3}{6} + \dfrac{X^4}{24} - \dfrac{X^5}{120} + \dfrac{X^6}{720} - \dfrac{X^7}{5040}$, ainsi $P_3' = -1 + X - \dfrac{X^2}{2} + \dfrac{X^3}{6} - \dfrac{X^4}{24} + \dfrac{X^5}{120} - \dfrac{X^6}{720}$ et $P_3'' = 1 - X + \dfrac{X^2}{3} - \dfrac{X^3}{6} + \dfrac{X^4}{24} - \dfrac{X^5}{120} = P_2$.

1. Autre façon de procéder : d'après le cours, $D\colon P \mapsto P'$ est linéaire, et que donc $\varphi = \mathrm{Id} + D \circ D$ est linéaire comme composée et somme d'applications linéaires.

Dès lors,

$$\varphi(P)=aP_0+b(P_1+P_0)+c(P_2+P_1)+d(P_3+P_2)=aP_0+(b+c)P_1+(c+d)P_2+dP_3\in \mathrm{vect}(P_0,P_1,P_2,P_3)=F$$

On a donc montré que φ est un endomorphisme de F. En reprenant le travail fait précédemment :

- $\varphi(P_0)=P_0=1P_0+0P_1+0P_2+0P_3$
- $\varphi(P_1)=P_0+P_1=1P_0+1P_1+0P_2+0P_3$
- $\varphi(P_2)=P_1+P_2=0P_0+1P_1+1P_2+0P_3$
- $\varphi(P_3)=P_2+P_3=0P_0+0P_1+1P_2+1P_3$

On en déduit que la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$ est : $T=\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc}\varphi(P_0) & \varphi(P_1) & \varphi(P_2) & \varphi(P_3)\end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} & \begin{array}{c}P_0\\P_1\\P_2\\P_3\end{array}\end{array}$

9. Remarquons que $T=A+N$ avec $A=I_4$ et $N=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, subséquemment $N^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, $N^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$. En revanche, $N^4=0_4$ et pour tout entier $k\geqslant 4$, $N^k=0_4$. Or, $AN=N=NA$, d'après la formule du binôme de Newton :

$$T^p=(A+N)^p=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}N^kA^{p-k}=\sum_{k=0}^{3}\binom{p}{k}N^k+\sum_{k=4}^{p}\binom{p}{k}\underbrace{N^k}_{=0_4}$$

$$=\binom{p}{0}N^0+\binom{p}{1}N+\binom{p}{2}N^2+\binom{p}{3}N^3=\begin{pmatrix}1 & p & \dfrac{p(p-1)}{2} & \dfrac{p(p-1)(p-2)}{6}\\ 0 & 1 & p & \dfrac{p(p-1)}{2}\\ 0&0&1&p\\ 0&0&0&1\end{pmatrix}$$

10. Par croissance comparée,

$$P_n(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!}=-\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\xrightarrow[x\to+\infty]{}-\infty$$

Or, deux fonctions équivalentes ont même limite, on en déduit que $P_n(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}-\infty$. De même,

$$P_n(x)\underset{-\infty}{\sim}\frac{(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!}=-\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\xrightarrow[x\to-\infty]{}+\infty$$

Donc $P_n(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}+\infty$.

11. Remarquons que $P_n(0)=1$. Fixons $M=-1$, comme $P_n(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}-\infty$:

$$\exists A\in\mathbb{R}_+\quad \forall x\in\mathbb{R}\qquad x\geqslant A\quad\Longrightarrow\quad P_n(x)\leqslant M=-1$$

En particulier, $P_n(A)\leqslant 0$. Ainsi, en tant que fonction polynômiale, $x\mapsto P_n(x)$ est continue sur $[\,0\,;A\,]$, en outre, $P_n(A)\leqslant 0\leqslant P_n(0)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c\in[\,0\,;A\,]$ tel que $P_n(c)=0$. Ainsi, le polynôme P_n a au moins une racine réelle.

12. Soit $n\in\mathbb{N}$:[2]

$$\begin{aligned}{P_n}' &= \sum_{k=1}^{2n+1}(-1)\times k\times\frac{(-X)^{k-1}}{k!}=-\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-X)^{k-1}}{(k-1)!}=-\left(\sum_{j=0}^{2n}\frac{(-X)^j}{j!}\right)\\ &= -\left(\sum_{j=0}^{2n+1}\frac{(-X)^k}{k!}-\frac{(-X)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)=-\left(P_n+\frac{X^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)=-P_n-\frac{X^{2n+1}}{(2n+1)!}\end{aligned}$$

2. On remarque que pour $n=0$, on obtient ${P_0}'=-P_0-X$, donc que P_0 est solution de l'équation différentielle $y'+y=-x$, ce qui est conforme au résultat de la question 1, il faut toujours vérifier la cohérence de ses résultats pour détecter des éventuelles erreurs de calculs.

13. Notons, z une éventuelle racine de P_n non simple, alors $P_n(z) = {P_n}'(z) = 0$. En reportant dans l'équation précédente, on obtient $P_n(z) = {P_n}'(z) - z^{2n+1}/(2n+1)!$, ainsi $z = 0$. On a donc prouvé que s'il y avait des racines multiples, alors elles étaient nulles. De surcroît, $P_n(0) = 1 \neq 0$. On en déduit qu'il n'y a pas de racines non simples. Ainsi, toutes les racines de P_n sont simples.

14. Partons de l'expression de P_n et séparons les termes d'indices pairs et impairs :

$$\begin{aligned} P_n &= \sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{2n+1} \frac{(-X)^k}{k!} + \sum_{\substack{k=0\\k \text{ impair}}}^{2n+1} \frac{(-X)^k}{k!} = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-X)^{2p}}{(2p)!} + \sum_{p=0}^{n} \frac{(-X)^{2p+1}}{(2p+1)!} = \sum_{p=0}^{n} \frac{X^{2p}}{(2p)!} + \sum_{p=0}^{n} \frac{-X^{2p+1}}{(2p+1)!} \\ &= \sum_{p=0}^{n} \left(\frac{X^{2p}}{(2p)!} + \frac{-X^{2p+1}}{(2p)! \times (2p+1)} \right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^{2k}}{(2k)!} \left(1 - \frac{X}{2k+1} \right) \end{aligned}$$

15.
- Fixons $x > 2n+1$, alors pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, $0 < 2k+1 \leqslant 2n+1 < x$, ainsi, $1 < x/(2k+1)$, ainsi $1 - x/2k+1 < 0$, en multipliant ce terme par $x^{2k}/(2k)! > 0$, on obtient, ainsi que $P_n(x)$ est une somme de réels strictement négatifs, ainsi $P_n(x) < 0$.
- Fixons $x < 1$ mais $x \neq 0$, alors pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, $x < 1 \leqslant 2k+1$, dès lors, $x/(2k+1) < 1$ et donc $1 - x/(2k+1) > 0$ en multipliant par $x^{2k}/(2k)! > 0$, on obtient que $P_n(x)$ est une somme de termes strictement positifs, donc $P_n(x) > 0$.
- Si $x = 0$, alors on a déjà vu que $P_n(x) = 1 \neq 0$.

Ainsi, P_n n'a aucune racine réelle hors de $[\,1\,;2n+1\,]$. Finalement ses racines réelles (et on sait qu'il y a existence d'après la question 11) sont nécessairement dans $[\,1\,;2n+1\,]$.

16. Fixons $n \in \mathbb{N}$, en appliquant le résultat de la question 12 à P_{n+1}, on obtient :

$$\begin{aligned} P'_{n+1} &= -P_{n+1} - \frac{X^{2(n+1)+1}}{(2(n+1)+1)!} = -\left(\sum_{k=0}^{2(n+1)+1} \frac{(-X)^k}{k!} \right) - \frac{X^{2n+3}}{(2n+3)!} \\ &= -\left(\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-X)^k}{k!} + \frac{(-X)^{2n+2}}{(2n+2)!} + \frac{(-X)^{2n+3}}{(2n+3)!} \right) - \frac{X^{2n+3}}{(2n+3)!} \\ &= -P_n - \frac{X^{2n+2}}{(2n+2)!} - \frac{-X^{2n+3}}{(2n+3)!} - \frac{X^{2n+3}}{(2n+3)!} = -P_n - \frac{X^{2n+2}}{(2n+2)!} \end{aligned}$$

En dérivant l'expression que l'on vient d'obtenir : ${P_{n+1}}'' = -{P_n}' - \dfrac{X^{2n+1}}{(2n+1)!} \underset{12}{=} P_n$.

17. Soit $\mathscr{P}(n)$: «$x \mapsto P_n(x)$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'une seule fois» :
- Pour $n = 0$, la fonction $x \mapsto P_0(x) = 1 - x$ est bien strictement décroissante et ne s'annule qu'en 1.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons, $\mathscr{P}(n)$ vraie, alors P_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'une seule fois en un $u_n \in \mathbb{R}$, ainsi pour tout $x > u_n$, $P''_{n+1}(x) = P_n(x) < P_n(u_n) = 0$ et pour tout $x > u_n$, $P''_{n+1}(x) < P_n(u_n) = 0$. On en déduit que P'_{n+1} est strictement décroissante sur $[\,u_n\,;+\infty\,[$ et strictement croissante sur $]\,-\infty\,;u_n\,]$. Ainsi, pour tout $x < u_n$, $P'_{n+1}(x) < P'(u_n)$ et pour tout $x > u_n$, $P'_{n+1}(x) < P'(u_n)$. On remarque alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P'_{n+1}(x) \leqslant P'_{n+1}(u_n) \underset{16}{=} P_n(u_n) - \frac{{u_n}^{2n+2}}{(2n+2)!} = -\frac{{u_n}^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Remarquons que $u_n \neq 0$, car $P_n(0) = 1 \neq 0$, dès lors $P'_{n+1}(u_n) < 0$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P'_{n+1}(x) < 0$. Donc, $x \mapsto P_{n+1}(x)$ soit strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, donc $x \mapsto P_{n+1}(x)$ est injective. De plus, on sait d'après la question 11 que P_{n+1} s'annule sur $\mathbb{R}$. Par injectivité, elle ne s'annule donc qu'une seule fois. On a montré que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

18.
```python
def U(n,epsilon):
    """Calcule une approximation de u_n à epsilon près"""
    a = 0        # P_n(a)>=0
    b = 2*n + 1 #P_n(b)<=0 (d'après la question 15)
    while b - a > epsilon:
        c = (a + b)/2
```

```python
        if P(c,n) > 0:# On peut se restreindre à [c,b]
            a=c
        else:#On peut se restreindre à [a,c]
            b=c
    return c
```

19. Utilisons le résultat de la question 14 à P_{n+1} et isolons le dernier terme de la somme :

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{X^{2k}}{(2k)!}\left(1-\frac{X}{2k+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^{2k}}{(2k)!}\left(1-\frac{X}{2k+1}\right) + \frac{X^{2(n+1)}}{(2(n+1))!}\left(1-\frac{X}{2(n+1)+1}\right) \\ &= P_n + \frac{X^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(1-\frac{X}{2n+3}\right) \end{aligned}$$

En remplaçant X par u_n, et en se souvenant que $P_n(u_n)=0$, on obtient :

$$P_{n+1}(u_n) = P_n(u_n) + \frac{{u_n}^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(1-\frac{u_n}{2n+3}\right) = \frac{{u_n}^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(1-\frac{u_n}{2n+3}\right)$$

20. Soit $n\in\mathbb{N}$. D'après la question 15, on sait que $0\leqslant u_n\leqslant 2n+1$, ainsi $\frac{u_n}{2n+3}<1$, ainsi, $1-\frac{u_n}{2n+3}>0$, comme $u_n\neq 0$, l'expression précédente prouve que $P_{n+1}(u_n)>0=P_{n+1}(u_{n+1})$. Or, si $u_{n+1}\leqslant u_n$, on aurait par décroissance de P_{n+1}, $P_{n+1}(u_{n+1})\geqslant P_{n+1}(u_n)$, ce qui est absurde, donc que $u_{n+1}>u_n$. Finalement la suite $(u_n)_n$ est (strictement) croissante.
21. Remarquons que comme $(u_n)_n$ est croissante et est supposée converger vers ℓ, on a $u_n\leqslant\ell$. En tant que fonction polynomiale, P_n est continue sur $[\,u_n\,;\ell\,]$, dérivable sur $]\,u_n\,;\ell\,[$, bornons sa dérivée sur $]\,u_n\,;\ell\,[$, soit $x\in\,]\,u_n\,;\ell\,[$:

$$|P_n'(x)| = \left|\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)k\frac{x^{k-1}}{k!}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{2n+1}\left|(-1)\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\right| = \sum_{j=0}^{2n}\frac{x^j}{j!}$$

D'après le résultat de la question 6 : $|P_n'(x)|\leqslant \mathrm{e}^{x}\leqslant \mathrm{e}^{\ell}$, par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$. Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis : $|P_n(u_n)-P_n(\ell)|\leqslant \mathrm{e}^{\ell}|u_n-\ell|$.
22. La question 5 montre que $\sum_{k=0}^{n}(-\ell)^k/k! \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-\ell}$, par extraction d'une suite convergente : $P_n(\ell)\xrightarrow[n\to\infty]{}\mathrm{e}^{-\ell}$. D'après la question 21 :

$$-\mathrm{e}^{\ell}|u_n-\ell| \leqslant P_n(u_n)-P_n(\ell) \leqslant \mathrm{e}^{\ell}|u_n-\ell|$$

Soit :

$$-\mathrm{e}^{\ell}|u_n-\ell| + P_n(\ell) \leqslant P_n(u_n) \leqslant \mathrm{e}^{\ell}|u_n-\ell| + P_n(\ell)$$

Or, $P_n(\ell)\xrightarrow[n\to\infty]{}\mathrm{e}^{\ell}$ et $|u_n-\ell|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, par théorème d'encadrement, on en conclut que $P_n(u_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}\mathrm{e}^{\ell}$.
23. Par définition de u_n, on sait que $P_n(u_n)=0$, dès lors $P_n(u_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Par unicité de la limite, on en déduit que $\mathrm{e}^{\ell}=0$ ce qui est absurde car une exponentielle ne s'annule pas. Comme $(u_n)_n$ est une suite croissante, d'après le théorème de la limite monotone, $(u_n)_n$ converge ou bien $u_n\xrightarrow[n\to\infty]{}+\infty$. Comme $(u_n)_n$ ne converge pas, on en conclut que $u_n\xrightarrow[n\to\infty]{}+\infty$.
24. Soit $x\in\,]\,0\,;1\,]$, posons $v\colon t\mapsto-\ln(t)$ et $u\colon t\mapsto t$, les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,x\,;1\,]$ et $v'\colon t\mapsto -1/t$ et $u'\colon t\mapsto 1$, par intégration par parties :

$$G(x) = [-t\ln(t)]_x^1 - \int_x^1 t\times\frac{-1}{t}\,\mathrm{d}t = x\ln(x)+(1-x)$$

25. Soit $k\in[\![\,1\,;n-1\,]\!]$, pour $t\in\left[\frac{k}{n}\,;\frac{k+1}{n}\right]$, on a $k/n\leqslant t\leqslant (k+1)/n$. Or, f est décroissante sur $]\,0\,;1\,]$ donc $f\left(\frac{k+1}{n}\right)\leqslant f(t)\leqslant f\left(\frac{k}{n}\right)$. En intégrant ces inégalités sur l'intervalle $\left[\frac{k}{n}\,;\frac{k+1}{n}\right]$, par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right) = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

26. En sommant ces inégalités pour $k \in [\![1 \,; n-1]\!]$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

D'après la relation Chasles, la somme des intégrales dans le terme central, vaut $\displaystyle\int_{1/n}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$, ainsi :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \mathrm{d}t \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

En particulier, on a déjà $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

Dans cette somme, il manque le terme pour $k = n$, mais ce terme vaut $f(1) = 0$. Ainsi,

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

On a la première inégalité demandée. Quant à la seconde, effectuons un décalage d'indice pour enlever les $k+1$:

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Ainsi :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right) = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{\ln(n)}{n}$$

On peut donc conclure que pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{\ln(n)}{n}$$

27. En utilisant la notation de la question 24, on obtient :

$$G(1/n) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant G(1/n) + \frac{\ln(n)}{n}$$

Or, d'après le résultat de la question 24 et par croissance comparée, on obtient que $G(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$. Et comme (par croissance comparée encore) $\ln(n)/n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, on peut en déduire, par le théorème d'encadrement, que $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

28. Ici, la somme de la question 27 est une somme de Riemann de la fonction f entre 0 et 1. **Cependant**, le théorème des sommes de Riemann affirme que la somme de Riemann converge vers l'intégrale de f sur $[\,0\,;1\,]$ **si** la fonction f est continue sur $[\,0\,;1\,]$. Malheureusement, ce n'est pas le cas ici car f n'est pas définie en 0 et ne peut être prolongeable par continuité en 0, car $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$. On ne pouvait donc pas appliquer directement ce théorème[3][4].

29. Calculons la somme, comme on sait qu'une somme de logarithme fournit le logarithme du produit

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} -\ln(k/n) = -\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) = -\ln\left(\frac{(n!)^{1/n}}{n}\right)$$

De plus, d'après la question 27, cette somme tend vers 1, ainsi $\ln\left((n!)^{1/n}/n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$. Grâce à la continuité de l'exponentielle en -1, on obtient que $\displaystyle\frac{(n!)^{1/n}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-1}$.

3. C'est pour cela que l'énoncé nous a guidé à travers d'encadrements pour en déduire un résultat similaire.

4. Le lecteur ambitieux/la lectrice ambitieuse remarquera que l'on peut généraliser à peu de frais ce résultat à n'importe quelle fonction f continue, positive et décroissante sur $]\,0\,;1\,]$.

30. Comme somme de fonctions dérivables, g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ pour tout $t>0$, $g'(t)=1+1/t>0$, ainsi g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Remarquons que $g(\mathrm{e}^{-2})=\mathrm{e}^{-2}-1<0$ et $g(\mathrm{e}^{-1})=\mathrm{e}^{-1}>0$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires (g est continue sur $[\mathrm{e}^{-2}\,;\mathrm{e}^{-1}]$), il existe $\alpha\in[\mathrm{e}^{-2}\,;\mathrm{e}^{-1}]$ tel que $g(\alpha)=0$, comme $g(\mathrm{e}^{-1})\neq 0$, $g(\mathrm{e}^{-2})\neq 0$, on en déduit que $\mathrm{e}^{-2}<\alpha<\mathrm{e}^{-1}$, comme g est strictement croissante, elle est injective et donc α est unique sur $\mathbb{R}_+^*$.
31. Appliquons la question 5 à l'entier $2n+1$ et à $x\in\mathbb{R}_+$, alors :

$$\mathrm{e}^{-x}-P_n(x)=\mathrm{e}^{-x}-\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(-x)^k}{k!}=(-1)^{2n+1+1}\int_0^x\frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\geqslant 0$$

Par positivité de l'intégrale avec $x\geqslant 0$. Ceci démontre que $\mathrm{e}^{-x}-P_n(x)\geqslant 0$ autrement dit que $P_n(x)\leqslant\mathrm{e}^{-x}$. Cependant, si on applique la question 5 à l'entier $2n$ et à $x\in\mathbb{R}_+$, alors :

$$\mathrm{e}^{x}-P_n(x)-\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\mathrm{e}^{x}-\left(\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-x)^k}{k!}\right)=(-1)^{2n+1}\int_0^x\frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=-\int_0^x\frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Or, cette intégrale est positive. Donc $\mathrm{e}^{-x}\leqslant P_n(x)+x^{2n+1}/(2n+1)!$.
32. Soit $n\in\mathbb{N}$, comme $u_n\geqslant 0$, on peut appliquer la question précédente à $x=u_n$. On obtient ainsi $\mathrm{e}^{-u_n}\leqslant P_n(u_n)+(u_n)^{2n+1}/(2n+1)!$. Or $P_n(u_n)=0$, donc $\mathrm{e}^{-u_n}\leqslant(u_n)^{2n+1}/(2n+1)!$. De plus, on peut aussi appliquer la question précédente, à P_{n+1} et on obtient $P_{n+1}(u_n)\leqslant\mathrm{e}^{-u_n}$.
33. D'après la question 15, on sait que $u_n\leqslant 2n+1$, en multipliant par ${u_n}^{2n}>0$, on obtient ${u_n}^{2n+1}\leqslant{u_n}^{2n}(2n+1)$. En divisant par $(2n+1)!>0$, on obtient que $(u_n)^{2n+1}/(2n+1)!\leqslant(u_n)^{2n}/(2n)!$ D'après la question précédente, ceci montre que $\mathrm{e}^{-u_n}\leqslant(u_n)^{2n}/(2n)!$. De plus, la question 19 affirme que

$$P_{n+1}(u_n)=\frac{{u_n}^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(1-\frac{u_n}{2n+3}\right)=\frac{{u_n}^{2n}{u_n}^2(2n+3-u_n)}{(2n+3)!}$$

Or, d'après la question 15, $u_n\leqslant 2n+1$, donc $2n+3-u_n\geqslant 2$ et $u_n\geqslant 1$, ainsi :

$$P_{n+1}(u_n)\geqslant\frac{{u_n}^{2n}\times 1^2\times 2}{(2n+3)!}$$

Par conséquent :

$$\frac{2(u_n)^{2n}}{(2n+3)!}\leqslant\mathrm{e}^{-u_n}\leqslant\frac{(u_n)^{2n}}{(2n)!}$$

En outre, la fonction inverse étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et en divisant par $(u_n)^{2n}>0$:

$$(2n)!\leqslant(u_n)^{2n}\mathrm{e}^{u_n}\leqslant\frac{(2n+3)!}{2}$$

34. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, d'après la question précédente :

$$(2n)!\leqslant(u_n)^{2n}\mathrm{e}^{u_n}\leqslant\frac{(2n+3)(2n+2)(2n+1)(2n)!}{2}\leqslant\frac{(2n+3)(2n+3)(2n+3)}{2}(2n)!=\frac{(2n+3)^3}{2}(2n)!$$

Par croissance de l'application $x\mapsto x^{\frac{1}{2n}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient :

$$((2n)!)^{\frac{1}{2n}}\leqslant u_n(\mathrm{e}^{u_n})^{\frac{1}{2n}}\leqslant\left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}((2n)!)^{\frac{1}{2n}}$$

En divisant par $2n>0$, on obtient :

$$\frac{((2n)!)^{\frac{1}{2n}}}{2n}\leqslant z_n\mathrm{e}^{z_n}\leqslant\left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}\frac{((2n)!)^{\frac{1}{2n}}}{2n}$$

35. D'après la question 29, $u_n = \dfrac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-1}$, par extraction $u_{2n} = \dfrac{((2n)!)^{\frac{1}{2n}}}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-1}$. De plus,

$$\left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2n}\ln\left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2n}(3\ln(2n+3)-\ln(2))}$$

Par croissance comparée, $(3\ln(2n+3)-\ln(2))/(2n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, par continuité de l'exponentielle en 0,

$$\left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Par encadrement, on en déduit que $z_n \mathrm{e}^{z_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-1}$. Par continuité du logarithme en e^{-1}, $\ln(z_n)+z_n = \ln(z_n\mathrm{e}^{z_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln(\mathrm{e}^{-1}) = -1$, ainsi $g(z_n) = z_n + \ln(z_n) + 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} -1+1 = 0$. Or, g est une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ vers $g(\mathbb{R}_+^*)$, par conséquent, g^{-1} est continue de $g(\mathbb{R}_+^*)$ vers $\mathbb{R}_+^*$, et comme $0 = g(\alpha) \in g(\mathbb{R}_+^*)$, g^{-1} est continue en en 0. Ainsi, $z_n = g^{-1}(g(z_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} g^{-1}(0) = \alpha$.

36. Remarquons que comme $\alpha > \mathrm{e}^{-2} > 0$, $\alpha \neq 0$. Dès lors, $z_n \sim \alpha$. Donc $u_n/(2n) \sim \alpha$, par conséquent, $u_n \sim 2\alpha n$.