Pour la proba, soyez au max !

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire définie sur un espace probabilités $(\Omega, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $[\![0 ; n]\!]$.

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on considère trois évènements $(X = k)$, $(X > k)$ et $(X > k-1)$. Écrire, sans justification, l'un de ces évènements comme une union disjointes des deux autres.
2. En déduire que $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > k - 1) - \mathbb{P}(X > k)$
3. Démontrer alors l'égalité $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k)$
4. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé, on pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p$, étudier la limite de $(u_n)_n$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on considère une urne contenant n billes numérotées de 1 à n. On effectue p tirages successifs avec remise. On note, pour $i \in [\![1 ; p]\!]$, Y_i la variable aléatoire du numéro de la i-ième boule tirée et X_n la variable aléatoire égale au plus grand numéro obtenu $X_n = \max(Y_1, Y_2, \dots, Y_p)$.

5. Soit $i \in [\![1 ; p]\!]$, donner la loi de Y_i, son espérance et sa variance.
6. Montrer que pour tout $k \in [\![1 ; n]\!]$, $\mathbb{P}(X_n \leqslant k) = \left(\frac{k}{n}\right)^p$.
   Indication : il est conseillé d'écrire d'abord l'évènement $(X_n \leqslant k)$ à l'aide des variables aléatoires : Y_1, $Y_2, \dots, Y_p$.
7. D'après les questions 3 et 6, en déduire l'expression de $\mathbb{E}(X_n)$.
8. D'après la question 4, en déduire un équivalent de $\mathbb{E}(X_n)$ quand n tend vers l'infini.
9. Déterminer la loi de X_n, c'est-à-dire la valeur de $\mathbb{P}(X_n = k)$ pour tout $k \in [\![1 ; n]\!]$.

Un problème de fin d'année

Ce problème est constitué de plusieurs parties largement indépendantes entre elles. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme $P_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-X)^k}{k!}$.

Mise en bouche

1. Résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$: $y'(x) + y(x) = -x$ avec la condition initiale $y(0) = 1$
2. Écrire une fonction Python `Factorielle(n)` qui à un entier naturel n renvoie sa factorielle.
   On pourra procéder de façon itérative ou de façon récursive.
3. Donner l'expression explicite de P_0, P_1, P_2 et P_3.
4. Écrire une fonction Python `P(x,n)` qui prend pour argument x et n et renvoie la valeur de $P_n(x)$.
   On pourra utiliser la fonction Factorielle déjà écrite.
   Un bonus sera accordé aux codes optimaux en complexité (on ne demande pas de justifier la complexité).

Soit $x \in \mathbb{R}$, on rappelle que $\frac{x^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange (ou de la formule de Taylor reste intégral), appliquée à la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ sur $[0, x]$ (ou sur $[x, 0]$), $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^k}{k!} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-x}$.
6. À l'aide de la formule de Taylor reste intégral. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leqslant \mathrm{e}^{x}$.

Un peu d'algèbre

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une famille libre de polynômes de $\mathbb{R}[X]$. En déduire $\mathscr{B}$ une base de $F = \mathrm{vect}\,(P_0, P_1, \dots, P_n)$

Pour les questions 8 et 9, on prend $n = 3$.

8. Montrer que $\varphi\colon P \mapsto P + P''$ est un endomorphisme de F et écrire la matrice de cet endomorphisme dans $\mathscr{B}$ que l'on notera $T = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$.
Ne pas oublier de justifier que $\varphi\colon F \to F$.
9. Calculer T^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Étude de la suite des racines des polynômes P_n

10. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer les limites de $x \mapsto P_n(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
11. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n admet au moins une racine réelle.
12. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n' = -P_n - \dfrac{X^{2n+1}}{(2n+1)!}$
13. Montrer que toutes les racines (réelles ou complexes) de P_n sont simples.
14. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^{2k}}{(2k)!}\left(1 - \frac{X}{2k+1}\right)$$
15. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les racines réelles de P_n sont dans l'intervalle $[\,1\,;2n+1\,]$.
16. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$P_{n+1}' = -P_n - \frac{X^{2n+2}}{(2n+2)!} \qquad \text{et} \qquad P_{n+1}'' = P_n$$
17. Montrer par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto P_n(x)$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'une seule fois.

On note alors u_n l'unique racine réelle de P_n, on a donc $P_n(u_n) = 0$.

18. Recopier et compléter la fonction Python suivante afin de calculer une approximation de u_n à ε près à l'aide de la méthode de la dichotomie.

```python
def U(n,epsilon):
    """Calcule une approximation de u_n à epsilon près"""
    a =
    b =
    while
        c = (a+b)/2
        if

        else:
```

19. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$P_{n+1}(u_n) = \frac{{u_n}^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(1 - \frac{u_n}{2n+3}\right)$$
20. En déduire que la suite $(u_n)_n$ est croissante.

Dans les trois questions suivantes, on suppose que $(u_n)_n$ converge vers un réel ℓ.

21. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|P_n(u_n) - P_n(\ell)| \leqslant \mathrm{e}^{\ell}|u_n - \ell|$, on pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis et la question 6.
22. À l'aide de la question 5, déterminer la limite de $P_n(\ell)$ quand $n \to +\infty$, puis démontrer que $P_n(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-\ell}$.
23. Aboutir à une contradiction et conclure sur la nature de la limite de $(u_n)_n$.

Quelques résultats intermédaires d'intégration

Pour $t \in]\,0\,;1\,]$, on pose $f(t) = -\ln(t)$

24. Fixons $x \in]\,0\,;1\,]$, donner la valeur de $G(x) = \displaystyle\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.
 On pourra procéder par une intégration par parties.
25. Soit un entier n supérieur ou égale à 2, justifier que pour tout $k \in [\![\,1\,;n-1\,]\!]$:
$$\forall t \in \left[\frac{k}{n}\,;\frac{k+1}{n}\right] \qquad f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leqslant f(t) \leqslant f\left(\frac{k}{n}\right)$$
 En déduire que :
$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$
26. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$:
$$\int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{\ln(n)}{n}$$
27. En déduire la limite de $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ quand $n \to +\infty$
28. Y avait-il un résultat du cours qui permettait d'obtenir ce résultat directement ? Justifier.
29. Déduire de la question 27 que $\displaystyle\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-1}$
30. On pose, pour tout $t \in]\,0\,;+\infty\,[$, $g(t) = t + \ln(t) + 1$. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in]\,0\,;+\infty\,[$ tel que $g(\alpha) = 0$ et justifier que $\mathrm{e}^{-2} < \alpha < \mathrm{e}^{-1}$.

Équivalent de la suite $(u_n)_n$

31. À l'aide de la formule de Taylor reste intégrale, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$P_n(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x} \leqslant P_n(x) + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
32. Déduire de la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1}(u_n) \leqslant \mathrm{e}^{-u_n} \leqslant \dfrac{(u_n)^{2n+1}}{(2n+1)!}$
33. En utilisant les résultats des questions 15 et 19, obtenir :
$$\frac{2(u_n)^{2n}}{(2n+3)!} \leqslant \mathrm{e}^{-u_n} \leqslant \frac{(u_n)^{2n}}{(2n)!}$$
 Puis :
$$(2n)! \leqslant (u_n)^{2n}\mathrm{e}^{u_n} \leqslant \frac{(2n+3)!}{2}$$
34. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n = \dfrac{u_n}{2n}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\frac{((2n)!)^{\frac{1}{2n}}}{2n} \leqslant z_n\mathrm{e}^{z_n} \leqslant \left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \frac{((2n)!)^{\frac{1}{2n}}}{2n}$$

On rappelle que la fonction g et le réel α ont été définis à la question 30.

35. En déduire que la suite $(g(z_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 puis que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers α.
36. En déduire un équivalent simple de la suite $(u_n)_n$.