Débat : pour ou contre les variables uniformes à l'école ?

1. Soit $k \in [\![1\,; n]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{1}{n}$, $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$
2. • Si $j \leqslant k$, alors sachant que l'évènement $(X = k)$ est réalisé, on tire un nombre au hasard et uniformément entre 1 et k, ainsi, $\mathbb{P}(Y = j|X = k) = \dfrac{1}{k}$.
   • Si $j > k$, et que l'évènement $(X = k)$ est réalisé, alors il est impossible que l'évènement $(Y = j)$ se réalise, autrement dit $\mathbb{P}(Y = j|X = k) = 0$.
3. Remarquons que $Y(\Omega) = [\![1\,; n]\!]$. Soit $j \in [\![1\,; n]\!]$, alors $(X = 1)$, $(X = 2)$, …, $(X = n)$ forment un système complet d'évènements, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = j) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Y = j|X = k)\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{j-1} \mathbb{P}(Y = j|X = k)\mathbb{P}(X = k) + \sum_{k=j}^{n} \mathbb{P}(Y = j|X = k)\mathbb{P}(X = k)\\ &= \sum_{k=1}^{j-1} 0 + \sum_{k=j}^{n} \frac{1}{k}\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=j}^{n}\frac{1}{k}\end{aligned}$$

4. $\mathbb{P}((Y = 2) \cap (X = 1)) = 0$, en effet si $(X = 1)$ est réalisé alors l'évènement $(Y = 2)$ est impossible. Or, $\mathbb{P}(X = 1) = \dfrac{1}{n}$ et $\mathbb{P}(Y = 2) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k} \geqslant \dfrac{1}{2n}$, donc par produit de termes strictement positifs, $\mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 2) > 0$, ainsi $\mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 2) \neq \mathbb{P}((X = 1) \cap (Y = 2)) = 0$. On peut en conclure que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.
5. $(X = 1)$, $(X = 2)$, …, $(X = n)$ forment un système complet d'évènements, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = Y|X = k)\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Y = k|X = k)\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{kn}$$

Des questions en séries

1. Il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\dfrac{1}{(X+1)(X+2)} = \dfrac{A}{X+1} + \dfrac{B}{X+2}$, donc $\dfrac{1}{X+2} = A + \dfrac{B(X+1)}{X+2}$ en remplaçant X par -1 il vient $A = 1$. De même, $\dfrac{1}{X+1} = B + \dfrac{A(X+1)}{X+2}$ en remplaçant X par -2, il vient $B = -1$. Dès lors, pour $n \in \mathbb{N}$, par somme télescopique :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

   Par conséquent, la série $\sum \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ et sa somme vaut $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = 1$
2. Grâce aux $DL_1(0)$: $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) + \dfrac{-1}{n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ Or, $\sum\dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann de paramètre $2 > 1$ donc convergente, par comparaison à série à termes positifs et convergente, $\sum\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$ converge.
3. $\dfrac{n\mathrm{e}^{-n^2}}{\frac{1}{n^2}} = n^3\mathrm{e}^{-n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (par croissance comparée), dès lors, $n\mathrm{e}^{-n2} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Or, $\sum\dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann de paramètre $2 > 1$ donc convergente, par comparaison à série à termes positifs et convergente $\sum n\mathrm{e}^{-n^2}$ converge.
4. Posons $f : x \mapsto x\mathrm{e}^{-x^2}$, par composée et produit f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}(1 - 2x^2)$. Ainsi, f est décroissante sur $[\,1\,; +\infty\,[$. Soit un entier $k \geqslant 2$, alors pour $t \in [\,k\,; k+1\,]$, $f(t) \leqslant f(k)$, donc, par

croissance de l'intégrale, $\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}t$, de même, pour tout $t \in [\,k-1\,;k\,]$, $f(k) \leqslant f(t)$, par croissance de l'intégrale, $\int_{k-1}^{k} f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$. Ainsi, soit $n \in \mathbb{N}^*$ et prenons $k \geqslant n+1$, on a $\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$, en sommant cette inégalité pour $k \in [\![\,n+1\,;p\,]\!]$, on obtient par Chasles : $\int_{n+1}^{p+1} f \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} k\mathrm{e}^{-k^2} \leqslant \int_n^p f$. D'où $-\frac{\mathrm{e}^{-(p+1)^2}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)^2}}{2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} k\mathrm{e}^{-k^2} \leqslant -\frac{\mathrm{e}^{-p^2}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{-n^2}}{2}$. On observe que les trois termes ont une limite quand $p \to +\infty$, ainsi, par conservation des inégalités larges lors d'un passage à la limite, on obtient :

$$\frac{\mathrm{e}^{-(n+1)^2}}{2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathrm{e}^{-k^2} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-n^2}}{2}$$

Des questions d'intégration

1. On pose $u = \cos(x)$, de sorte que $\mathrm{d}u = -\sin(x)\,\mathrm{d}x$, ainsi :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)\,\mathrm{d}x}{\cos^2(x) + 5\cos(x) + 6} = \int_1^0 \frac{-\,\mathrm{d}u}{u^2+5u+6} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u^2+5u+6}$$

   Remarquons que $X^2+5X+6 = (X+2)(X+3)$, ainsi, il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\frac{1}{X^2+5X+6} = \frac{A}{X+2} + \frac{B}{X+3}$. En multipliant par $X+2$, il vient $\frac{1}{X+3} = A + \frac{B(X+2)}{X+3}$, en remplaçant X par -2, il vient, $A = 1$. De même, en multipliant par $X+3$, il vient $\frac{1}{X+2} = \frac{A(X+2)}{X+3} + B$, en remplaçant X par -3, il vient $B = -1$. Dès lors,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)\,\mathrm{d}x}{\cos^2(x)+5\cos(x)+6} &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u^2+5u+6} = \int_0^1 \frac{1}{u+2} - \frac{1}{u+3}\,\mathrm{d}u \\ &= [\ln(u+2) - \ln(u+3)]_0^1 = \ln(3) - \ln(4) - \ln(2) + \ln(3) = \ln\left(\frac{9}{8}\right)\end{aligned}$$

2. On pose $f\colon x \mapsto x\mathrm{e}^x$, par produit de fonctions continues, f est continue sur $[\,0\,;1\,]$, ainsi, d'après le théorème des sommes de Riemann :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k\mathrm{e}^{k/n}}{n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n}\mathrm{e}^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

   Or, par intégration par parties, $\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = [x\mathrm{e}^x]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - (\mathrm{e}-1) = 1$. On peut en conclure que $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k\mathrm{e}^{k/n}}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

3. Calculer $\int_2^3 x^3\ln(x)\,\mathrm{d}x$. Par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_2^3 x^3\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^4}{4}\ln(x)\right]_2^3 - \int_2^3 \frac{x^4}{4}\times\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \ln(3)\frac{3^4}{4} - \ln(2)\frac{2^4}{4} - \left[\frac{x^4}{16}\right]_2^3 = \frac{81\ln(3)}{4} - 4\ln(2) - \frac{81}{16} + 1 = \frac{81\ln(3)}{4} - 4\ln(2) - \frac{65}{8}\end{aligned}$$

Wallis-like

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. • $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$
   • $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \, \mathrm{d}t = [-\ln(|\cos(t)|]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \ln(1) = \frac{\ln(2)}{2}$
   • $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(t) + 1 - 1 \, \mathrm{d}t = [\tan(t) - t]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f : t \mapsto \tan^n(t)$ est continue et positive sur $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$ et $f(1) > 0$, d'après le théorème de stricte positivité de l'intégrale, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t) \, \mathrm{d}t > 0$
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, par linéarité de l'intégrale,
$$I_n - I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t) - \tan^{n+1}(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t)(1 - \tan(t)) \, \mathrm{d}t$$
Or, comme tan est croissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$, pour tout $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$, $\tan(0) \leqslant \tan(t) \leqslant \tan\frac{\pi}{4} = 1$, ainsi, $\tan^n(t)(1 - \tan(t)) \geqslant 0$, par positivité de l'intégrale, $I_n - I_{n+1} \geqslant 0$. Ceci prouve que la suite $(I_n)_n$ est décroissante.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale, $I_{n+2} + I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t)(1 + \tan^2(t)) \, \mathrm{d}t$, on pose $u = \tan(t)$, alors $\mathrm{d}u = 1 + \tan(t)^2 \, \mathrm{d}t$, ainsi, $I_{n+2} + I_n = \int_0^1 u^n \, \mathrm{d}u = \left[\frac{u^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$
5. La suite $(I_n)_n$ et décroissante et minorée par 0, d'après le théorème de la limite monotone, $(I_n)_n$ converge. Notons, ℓ sa limite. Alors, par extraction, $I_{n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$, par somme
$$\frac{1}{n+1} = I_{n+2} + I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\ell$$
Mais par unicité de la limite, on en déduit que $2\ell = 0$ donc $\ell = 0$. Ainsi, $I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, posons $\mathscr{P}(n)$:« $I_{2n} = (-1)^n \left(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right)$ ». Pour $n = 1$:
$$(-1)^n \left(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right) \quad = \quad -\left(\frac{\pi}{4} - (-1)\right) = 1 - \frac{\pi}{4} = I_2$$
Ainsi, $\mathscr{P}(1)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, alors en utilisant la relation de la question 4 :
$$(-1)^{n+1} \left(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right) = -(-1)^n \left(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \frac{(-1)^n}{2n+1}\right) = -I_{2n} + \frac{1}{2n+1} = I_{2n+2} = I_{2(n+1)}$$
Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la formule est vraie.
Comme $I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, par extraction $I_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, ainsi, $\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, on en déduit que $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{4}$, par extraction $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{4}$. On peut en conclure que la série $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

Quand les séries jouent à transformers !

On considère $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites complexes. Pour $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$

1. $S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i=1}^{k-1} a_i + a_k = S_{k-1} + a_k$. Par conséquent, $a_k = S_k - S_{k-1}$

2. Soit $n \geqslant 1$, en utilisant la question précédente et la linéarité de la somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=1}^{n} (S_k - S_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} (S_k b_k - S_{k-1} b_k) = \sum_{k=1}^{n} S_k b_k - \sum_{k=1}^{n} S_{k-1} b_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} S_k b_k - \sum_{j=0}^{n-1} S_j b_{j+1} = S_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} S_k b_k - S_0 b_1 - \sum_{k=1}^{n-1} S_k b_{k+1} = S_n b_n - S_0 b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k-1})
\end{aligned}$$

3. $(S_n)_n$ est bornée, donc il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout M, $|S_k| \leqslant M$. Ainsi, en utilisant le fait que (b_n) soit décroissante,

$$|S_k(b_k - b_{k+1})| = |S_k| \times |b_k - b_{k+1}| = |S_k|(b_k - b_{k+1}) \leqslant M(b_k - b_{k+1})$$

Comme la suite $(b_n)_n$ converge, la série télescopique $\sum b_k - b_{k+1}$ converge tout comme $\sum M(b_k - b_{k+1})$, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum |S_k(b_k - b_{k+1})|$ converge. Par conséquent, $\sum S_k(b_k - b_{k+1})$ converge absolument donc converge. En particulier, il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n-1} S_k(b_k - b_{k-1}) \xrightarrow[n \to \infty]{} \ell$$

De plus, comme $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $(S_n)_n$ est bornée $S_n b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, par somme de suites convergentes, on en déduit que $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k\right)_n$ converge. Ainsi, on a bien montré que $\sum a_k b_k$ est une série convergente.

4. On pose, pour $k \in \mathbb{N}$, $a_k = (-1)^k$, par somme des termes d'une suite géométrique (de raison -1)

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{1 - (-1)} = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{2}$$

Ainsi $S_n \in \{0, 1\}$, donc la suite $(S_n)_n$ est bornée, comme $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $(b_n)_n$ est décroissante, d'après la question 3, on en déduit que $\sum (-1)^n b_n$ converge [1].

5. Si $\theta \equiv 0\ [2\pi]$, alors $\sum\limits_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = 0$. Considérons θ tel que $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$, alors, par somme des termes d'une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \neq 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\theta}) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right)^k\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta(n+1)}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta(n+1)}{2}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}} \times \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\theta(n+1)}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta(n+1)}{2}}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}}\right) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{n\theta}{2}} \times \frac{-2\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\theta(n+1)}{2}\right)}{-2\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}\right) \\
&= \frac{\sin\left(\dfrac{\theta(n+1)}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)} \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{n\theta}{2}}\right) = \frac{\sin\left(\dfrac{\theta(n+1)}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)} \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)
\end{aligned}$$

6. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ de sorte que [2] $(b_n)_n$ soit décroissante et $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. On pose aussi $a_n = \sin(n\theta)$, la question précédente, prouve que $\left|\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\right| \leqslant 0$ si $\theta \equiv 0[2\pi]$ et que $\left|\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\right| \leqslant |\sin(\theta/2)|^{-1}$ sinon. Ainsi, $(S_n)_n$ est bornée, d'après le résultat de la question 3, $\sum \dfrac{\sin(n\theta)}{\sqrt{n}}$ converge.

1. Ce résultat sera un résultat de deuxième année appelé théorème des séries alternées.
2. On pourrait objecter que b_0 n'est pas définie contrairement aux hypothèses de la question 3, mais dans ce cas, on peut poser arbitrairement $b_0 = 48$.