Débat : pour ou contre les variables uniformes à l'école ?

Soient un entier $n \geqslant 2$ et X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[\![1\,;n]\!]$.

1. Donner, sans preuve, les valeurs de $\mathbb{P}(X = k)$ (pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$) de $\mathbb{E}(X)$ et de $\mathbb{V}(X)$.
2. Soit $k \in [\![1\,;n]\!]$, si l'évènement $(X = k)$ est réalisé, on tire un nombre uniformément au hasard dans $[\![1\,;k]\!]$ et on note Y ce nombre. Pour tout $(k, j) \in [\![1\,;n]\!]^2$, donner la valeur de $\mathbb{P}(Y = j|X = k)$.
3. Déterminer la loi de Y (les probabilités seront données sous forme de sommes que l'on ne cherchera pas à calculer)
4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$ (sous forme d'une somme que l'on ne cherchera pas à calculer).

Des questions en séries

1. Démontrer que la série $\sum \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ converge et calculer sa somme.
2. Étudier la convergence de la série $\sum \left(\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\right)$.
3. En comparant à une série de Riemann, montrer que $\sum n\mathrm{e}^{-n^2}$ converge.
4. Déterminer une majoration et une minoration du reste d'ordre n : $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} k\mathrm{e}^{-k^2}$.

   Étant entendu que la majoration et la minoration sont des suites strictement positives et tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Des questions d'intégration

1. À l'aide d'un changement de variable, calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)\,\mathrm{d}x}{\cos^2(x) + 5\cos(x) + 6}$
2. Déterminer la limite de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k\mathrm{e}^{k/n}}{n^2}$ quand $n \to +\infty$.
3. Calculer $\displaystyle\int_2^3 x^3 \ln(x)\,\mathrm{d}x$.

Wallis-like

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n > 0$.
3. Démontrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante.
4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} + I_n = \dfrac{1}{n+1}$.

   On pourra poser $u = \tan(t)$.
5. Démontrer que la suite $(I_n)_n$ converge et déterminer sa limite.
6. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{2n} = (-1)^n \left(\dfrac{\pi}{4} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right)$ en déduire que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ converge et déterminer sa somme.

Quand les séries jouent à transformers !

On considère $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites complexes. Pour $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$

1. Soit $k \geqslant 1$, exprimer a_k en fonction de S_k et S_{k-1}
2. Déduire de la question précédente, que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = S_n b_n - S_0 b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1})$$

   Toute récurrence sera considérée comme une agression envers le correcteur et sera sanctionnée.
3. Montrer que si $(S_n)_n$ est bornée et si (b_n) est une suite positive décroissante et de limite nulle, alors la série $\sum a_n b_n$ converge.
4. On suppose que (b_n) est une suite positive décroissante et de limite nulle, déduire de la question précédente que $\sum (-1)^n b_n$ est une série convergente.
5. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$
6. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n\theta)}{\sqrt{n}}$ converge.