Dans les feuilles de TD, les compétences utilisées sont indiquées avec le code suivant :

- Cou : savoir appliquer le cours
- Com : savoir communiquer, établir une rédaction propre
- Cal : calculer, manipuler des symboles, maîtriser le formalisme
- Rai : raisonner, argumenter
- Rep : représenter
- Rec : stratégies, s'engager dans une recherche
- Mod : modéliser

Le symbole 𝄞 signifie qu'il s'agit dans un exercice classique et donc à bien connaître.
Le symbole © signifie que l'exercice est corrigé sur CDP (la liste des exercices corrigés est susceptible d'évoluer).
Le symbole YT signifie que l'exercice est corrigé sur Youtube.
Le nombre d'étoiles ⋆ indique la difficulté (relativement subjectif).

Sommes

Exercice 1 (⋆ Cal)**.** Soit $(u_n)_n$ une suite, calculer $\sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)$ et $\sum_{k=2}^{n}(u_k-u_{k+1})$.

Exercice 2 (⋆ Cal)**.** Soit $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer les sommes/produits suivants :

a) $\sum_{k=0}^{n} x$ b) $\sum_{k=0}^{n} k$ c) $\sum_{k=0}^{n} x^k$

d) $\prod_{k=0}^{n-1} x$ e) $\prod_{k=1}^{n} k$ f) $\prod_{k=0}^{n} x^k$

g) $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)$ h) $\sum_{k=0}^{n}(2^k+4k+n-3)$ i) $\prod_{k=1}^{n}(2k+1)$

j) $\sum_{k=0}^{n}\frac{3^k}{2^{2k-1}}$ k) $\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ l) $\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$

m) $\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k$ n) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k$ o) $\prod_{\ell=1}^{n}\ell e^{-\ell}$

p) $\prod_{k=1}^{n}(2k)$ q) $\prod_{k=1}^{n}\frac{k^2-k}{2k^2+\cos(k)+1}$ r) $\prod_{k=1}^{n}\frac{2k+3}{2k-1}$

s) $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ t) $\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)$ u) $\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{i+2}{i}\right)$

v) $\sum_{k=1}^{2025} j^k$ $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ w) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k}3^{n-k}$ x) $\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}2^{k-1}$

y) $\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k$ $\omega=e^{i\frac{2\pi}{n}}$ z) $\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{kp}$ $p\in\mathbb{N}$

Exercice 3 (⋆ Cal)**.** Calculer, pour $n\geqslant 3$, $\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k+1}2^k$ et $\sum_{k=2}^{n-1}\binom{n}{k-1}(-1)^k$

Exercice 4 (⋆ Cal)**.** En utilisant la forme factorisée et la forme développée de $f\colon x\mapsto(1+x)^n$, calculer les sommes :

1. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ 2. $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}$ 3. $\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}$ 4. $\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{k+1}$

Exercice 5 (⋆⋆ Rai, Cal ©)**.**

1. Calculer pour $x\in\mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{n}x^k$.
2. En dérivant l'expression obtenue à la question précédente, calculer $\sum_{k=0}^{n}kx^k$.
3. Adapter ce qui précède au calcul de $\sum_{k=0}^{n}ke^{kx}$.

Suites

Exercice 6 (⋆ Cou, Cal)**.** Déterminer le terme général des suites définies par :

1. $u_0=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=2u_n+1$.
2. $u_0=1$, $u_1=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2}=4u_{n+1}-4u_n$.
3. $u_0=1$, $u_1=-1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $2u_{n+2}=3u_{n+1}-u_n$.
4. $u_0=1$, $u_1=2$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2}=u_{n+1}-u_n$.

Exercice 7 (⋆ Cal)**.** Déterminer un équivalent simple des suites définies par :

1. $\left(1+\frac{2}{n}\right)(n-\ln(n))^2$
2. $\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}$
3. $\frac{2\ln(n)-n}{3n+\sqrt{n}}$
4. $\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$
5. $\frac{n^2+\cos(n)}{2^n+\sin(n^2)}$
6. $\ln(n+1)$

Exercice 8 ($\star$ Rai, Cou)**.** On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
2. Que peut-on en déduire ?

Exercice 9 ($\star\star$ Rai, Rec ©)**.** 1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x^3 + nx = 1$ admet une unique solution.

On la note x_n.

2. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{n}$. En déduire le comportement de la suite $(x_n)_n$ en $+\infty$.
3. Montrer que $x_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
4. Montrer que $\frac{1}{n} - x_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^4}$.
5. En déduire $x_n \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

Exercice 10 (𝄞$\star\star\star$ Rai, Rec ©)**.** Soit $(u_n)_n$ une suite réelle et soit $(v_n)_n$ la suite suite réelle définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad v_n = \frac{u_1 + \ldots + u_n}{n}$$

1. Montrer que si u est bornée alors v est bornée. Que pensez-vous de la réciproque ?
2. (YT) Montrer que si u converge alors v converge vers la même limite (c'est le théorème de Cesàro). Que pensez-vous de la réciproque ?
3. Montrer que si u est croissante alors v est croissante.

Exercice 11 ($\star\star$ Rai)**.** Étude des suites définies par :

1. $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + u_n^2$.
2. $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n^2}{4}$.
3. $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n} - 1$.
4. $u_1 = 2025$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{-u_n}}{n}$.
5. $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2}{1 + u_n}$.

On cherchera d'abord à écrire $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f\colon I \to I$ à déterminer et on étudiera la monotonie de f.

Développements limités et équivalents

Exercice 12 ($\star$ Cou ©)**.** 1. $DL_5(0)$ de $x \mapsto \mathrm{e}^x \arctan(x)$

2. $DL_4(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1 + x + x^2}$
3. Équivalent de $x \mapsto \tan(3x) - \tan(x)$ en 0
4. Équivalent de $x \mapsto \frac{1}{\sin(x)^4} - \frac{1}{x^4}$ en 0

Exercice 13 (𝄞$\star\star\star$ Rai, Cal, Rec ©)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,\mathrm{d}x$

1. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
2. En intégrant par parties $W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t) \times \cos(t)\,\mathrm{d}t$, démontrer que $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$
3. En déduire une expression de W_{2n} et de W_{2n+1}.
4. Montrer que la suite $(W_n W_{n+1}(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et en déduire sa valeur.
5. Montrer que $W_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} W_n$
6. Montrer finalement que $W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$