Chapitre 1

Séries numériques

Prérequis :
- Sommes
- Suites

Objectifs :
- Donner un sens à une «somme infinie» lorsque c'est possible.
- Déterminer si c'est possible.
- Le cas échéant, calculer cette somme si c'est possible.

Attention : utiliser un lecteur de pdf adapté
Ce polycopié contient plusieurs animations, il est donc conseillé d'utiliser un lecteur de pdf capable de lire les animations (comme Adobe Reader, Foxit PDF Reader, Okular ou autres).

Table des matières

Dans tout ce chapitre, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ désigne une suite réelle.

1 Généralités sur les séries

Définition d'une série

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On appelle **série** de terme général u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Le terme S_n est la **somme partielle** d'indice n de cette série. On note $\sum u_n = (S_n)_n$ la série de terme général u_n.

Remarque 1. $S_0 = u_0$, $S_1 = u_0 + u_1$, $S_2 = u_0 + u_1 + u_2$ etc.

Définition de la convergence ou de la divergence d'une série et somme

On dit $\sum u_n$ **converge** (respectivement diverge) lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (respectivement diverge).
Si la série $\sum u_n$ converge, on appelle **somme (infinie)** de la série $\sum u_n$ la limite de $(S_n)_n$, notée $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Exemple des séries géométriques

Soit $q \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à la série géométrique $\sum q^n$.

- $\forall n \in \mathbb{N}$ si $q \neq 1$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ si $q = 1$, $S_n = n+1$
- si $|q| < 1$, alors $\sum q^n$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$.
- si $|q| \geqslant 1$, alors $\sum q^n$ diverge.

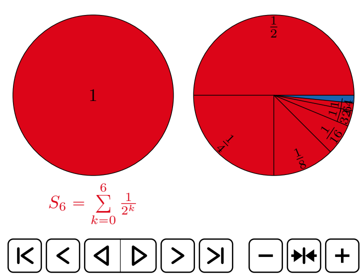

Figure 1 – Les séries géométriques (avec $q = 1/2$) : piece of cake

Péril imminent : la série géométrique de raison 1

On s'assure que $q \neq 1$ **avant** d'écrire $\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ou $\dfrac{1}{1-q}$, sous peine d'avoir des problèmes judiciaires.

Attention à ne pas confondre série, somme partielle et somme

La suite $(u_n)_n$ et le nombre u_n ne doivent pas être confondus. De même, la série $\sum u_n$, le réel $\sum_{k=0}^{n} u_k$ et le réel $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ (qui n'existe qu'après avoir montré que la série converge) ne doivent pas être confondus.

Remarque 2. Si $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite définie à partir de n_0, on définit de même $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$, par $\left(\sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k\right)_{n\geqslant n_0}$, et en cas de convergence, on note $\sum\limits_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$.

Exemple 1. Si $q \in \mathbb{R}$, alors $\sum\limits_{n\geqslant n_0} q^n$ converge ssi $|q| < 1$ et dans ce cas $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} q^n = \dfrac{q^{n_0}}{1-q}$.

Exemple de série divergente : la série harmonique

La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} 1/n$, appelée **série harmonique**, diverge, alors que $1/n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Proposition n° 1 : espace vectoriel des séries convergentes et linéarité de la somme

Soient des séries convergentes $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\sum \lambda u_n + v_n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Démonstration de la proposition n° 1 : Supposons que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ converge, alors

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda u_k + v_k = \lambda \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

Ceci prouve que $\sum \lambda u_k + v_k$ est une série convergente et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n + v_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Remarque 3. Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum u_n + v_n$ diverge.
Si $\sum u_n$ diverge et $\sum v_n$ diverge, alors on ne peut rien dire de $\sum u_n + v_n$.

Proposition n° 2 : condition nécessaire de convergence *(hors programme)*

Si la série $\sum u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Remarque 4. Par contraposée, si $u_n \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors la série $\sum u_n$ diverge, on dit que $\sum u_n$ **diverge grossièrement**.

Démonstration de la proposition n° 2 : Supposons que $\sum u_n$ converge, alors $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$. Or $(S_{n-1})_{n\geqslant 1}$ est une suite extraite de $(S_n)_n$ donc converge aussi vers $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$. Ainsi, en faisant la différence des deux suites, $S_n - S_{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Or $S_n - S_{n-1} = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k - \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k = u_n$, ainsi $(u_n)_n$ est nécessairement une suite qui tend vers 0. ∎

Exemples 2. Si $|q| \geqslant 1$, alors $\sum q^n$ diverge grossièrement tout comme $\sum n$, $\sum \dfrac{n+\cos(n)}{n}$, $\sum (-1)^n$.

Péril imminent la réciproque est fausse

Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, cela ne prouve pas que $\sum u_n$ converge (cf. $\sum 1/n$).

Convergence des séries télescopiques

Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_{n+1} - v_n$, alors $\sum_{k=0}^{n} u_k = v_{n+1} - v_0$, on peut ainsi savoir si $\sum u_n$ converge ou diverge.

Exemple 3. La série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente et sa somme vaut 1.

Exemple : l'exponentielle (admis)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x$.

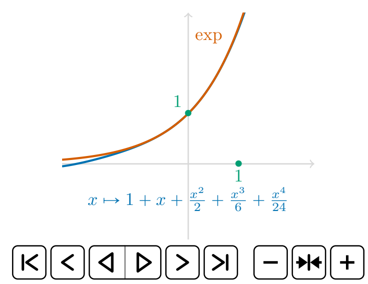

FIGURE 2 – Convergence de $\sum \frac{x^n}{n!}$ vers e^x.

Exemple : séries géométriques dérivées

Soit $q \in \mathbb{R}$. Les séries $\sum_{n \geqslant 1} nq^{n-1}$ et $\sum_{n \geqslant 2} n(n-1)q^{n-2}$ convergent si et seulement si $|q| < 1$.

De plus, si $|q| < 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$ et $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$.

2 Comparaison des séries à termes positifs

Proposition n° 3 : comparaison de deux séries à termes positifs

Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que : $\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$

1. Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$
2. Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ diverge.

Démonstration de la proposition n° 3 : Supposons que $\sum v_n$ converge, alors pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a $S_n \sum_{k=n_0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k \in \mathbb{R}$. Ceci montre que $\left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right)_n$ est une suite majorée, comme $S_{n+1} - S_n = u_n \geqslant 0$, $(S_n)_n$ est une suite croissante, d'après le théorème de la limite monotone, $(S_n)_n$ converge. Cela montre que $\sum u_n$ converge. De plus, comme les inégalités larges passent à la limite, on obtient que

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k$$

Le second point n'étant que la contraposée du premier. ■

Exemples 4. Étude de la nature des séries $\sum \frac{1}{n^2 + 11n + 3}$ et $\sum \frac{\ln(n)}{n}$.

Proposition n° 4 : séries dont les termes sont équivalents

Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries à **termes strictement positifs** telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$. Alors $\sum v_n$ et $\sum u_n$ ont même nature.

Exemple : série de Riemann de paramètre 2

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (cette valeur n'est pas à connaître).

Attention les sommes ne sont pas équivalentes

Si $u_n \sim v_n$, en général $\sum_{k=0}^{n} u_k \not\sim \sum_{k=0}^{n} v_k$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \neq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$ (en effet, les sommations d'équivalents sont interdites).

Exemple 5. Étude de la nature de la série $\sum \frac{1}{n - \ln(n)}$.

3 Séries absolument convergentes

Définition d'une série absolument convergente

On dit qu'une série $\sum u_n$ **converge absolument** si la série $\sum |u_n|$ converge.

Exemple 6. La série $\sum \frac{\cos(n)}{n^2}$ est absolument convergente.

Remarques 5.
- Pour étudier la convergence absolue, on utilise les outils vus précédemment à la série $\sum |u_n|$.
- Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, $\sum u_n$ converge si et seulement si elle converge absolument.

Théorème n° 1 : la convergence absolue implique la convergence

Si la série $\sum u_n$ converge absolument, alors elle converge, de plus : $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$

Démonstration du théorème n° 1 :

- Commençons par le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, supposons que $\sum u_n$ converge absolument et soit à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-|u_n| \leqslant u_n \leqslant |u_n|$, ainsi $0 \leqslant u_n + |u_n| \leqslant 2|u_n|$. Posons $v_n = u_n + |u_n|$, par hypothèse $\sum |u_n|$ converge, donc $\sum 2|u_n|$ aussi. Par comparaison de séries à termes positifs, on peut en déduit que $\sum v_n$ converge. De plus, $u_n = v_n - |u_n|$, ainsi comme $\sum v_n$ converge et $\sum |u_n|$ converge. On peut en conclure que $\sum u_n$ converge.
- Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente complexe. Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après l'inégalité triangulaire, on a que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |u_k|$$

Or, nous savons que $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, de plus $x \mapsto |x|$ est continue, on peut donc dire que [1]

$$\lim_{n \to +\infty} \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right|$$

De plus, comme $\sum |u_k|$ est une série à termes positifs, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |u_k| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$$

1. Rappelons que si $(x_n)_n$ est une suite convergente vers a et que f est continue en a, alors $(f(x_n))_n$ tend vers $f(a)$.

Comme les inégalités larges passent à la limite, on obtient

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| \qquad \blacksquare$$

Remarque 6. La réciproque est fausse pour une série de signe quelconque.

Exemple 7. Posons $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+(-1)^n}$, alors $\sum u_n$ converge, mais ne converge pas absolument.

Théorème n° 2 : invariance de la somme par permutation *(admis)*
Soient une série $\sum u_n$ absolument convergente et $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection, alors $\sum u_{\sigma(n)}$ converge absolument et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$

4 Complément hors programme

Théorème n° 3 : o d'une série SATP convergente *(hors programme)*
Soit $\sum p_n$ une série **à termes strictement positifs convergente** et $\sum u_n$ une série quelconque.
Si $u_n = o(p_n)$, alors $\sum u_n$ converge absolument donc converge.

Démonstration du théorème n° 3 : Supposons que $u_n = o(p_n)$, donc $\dfrac{u_n}{p_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, en prenant la définition de la limite avec $\varepsilon = 1 > 0$, cela veut dire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\left|\dfrac{u_n}{p_n}\right| \leqslant 1$, ainsi, $|u_n| \leqslant p_n$, comme $\sum p_n$ converge, on en déduit par comparaison de suites positives, $\sum |u_n|$ converge. Ainsi $\sum u_n$ converge absolument donc converge. $\blacksquare$

Remarque 7. Ce théorème est hors programme, dans les faits si $\dfrac{u_n}{p_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ avec $\sum p_n$ une série à termes positifs et convergente, alors on démontre que $\sum u_n$ converge absolument en calquant la preuve.

Exemple 8. Montrer que $\sum \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$ converge.

5 Cartes mentales