

Produit scalaire

Exercice 1 (★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que $n^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n i\right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}\right)$.

Exercice 2 (★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le système (S) suivant :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i = n \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 = n \end{cases} \text{ d'inconnue } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

1. Trouver une solution évidente de (S).
2. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, démontrer que $\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2$.
3. En déduire les solutions de (S).

Exercice 3 (★). Pour chaque F ci-dessous, déterminer une base de F , déterminer une base de F^\perp ainsi que l'expression de la projection orthogonale sur F :

1. $F = \text{vect}((1, 0, 1, 0), (-2, 1, 0, 3))$
2. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + 2z = 0 = x - y - z - t\}$

Exercice 4 (♣★ Cou, Rai ©). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^\top A)$.
2. En déduire que $\text{Im}(A^\top) = \text{Im}(A^\top A)$

Exercice 5 (★). Soit $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0\}$.

1. Déterminer une base de H et une de H^\perp .
2. Déterminer une base orthonormale de H notée \mathcal{B}' .
3. Soit p la projection sur H , déterminer l'expression de p .
4. Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}''}(p)$ où \mathcal{B} est la base canonique et \mathcal{B}'' la juxtaposition de \mathcal{B}' et d'une base orthonormale de H^\perp .
5. Quelle relation y a-t-il entre ces deux matrices ?
6. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $d(u, H)$.

Exercice 6 (★). Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on suppose que $M + M^\top$ est nilpotente, montrer que M est antisymétrique.

Exercice 7 (★). 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A^\top A$ est diagonalisable et que $\text{Sp}(A^\top A) \subset \mathbb{R}_+$.

2. Soit S une matrice symétrique, dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles, montrer qu'il existe $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $S = R^\top R$.

Exercice 8 (♣★★ Rai ©). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires de \mathbb{R}^n . On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle^2$.

1. Montrer que \mathcal{B} est une base orthonormale.
2. Montrer que l'on peut aboutir à la même conclusion mais en se plaçant dans \mathbb{R}^p mais toujours $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de \mathbb{R}^p .

Exercice 9 (★). On considère p la projection orthogonale du plan de \mathbb{R}^3 ayant pour équation $x + y + 2z = 0$. Donner la matrice de p dans la base canonique.

Exercice 10 (♣★ ★★ Rec). Soit (x_1, x_2, \dots, x_p) une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n tels que $\langle x_i, x_j \rangle < 0$ pour tout $i \neq j$. Montrer que $p \leq n + 1$.

Exercice 11 (♣★★ Cal, Rai, Rec ©). Considérons une famille $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$. On note $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (appelée matrice de Gram) la matrice $(\langle x_i, x_j \rangle)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$.

1. Que vaut $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ si (x_1, x_2, \dots, x_n) est une famille orthonormale de E ?
2. Montrer que si (x_1, x_2, \dots, x_n) est une famille liée, alors $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n'est pas inversible.
3. Montrer que si $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n'est pas inversible alors (x_1, x_2, \dots, x_n) est une famille liée.

Exercice 12 (★). Justifier que les matrices suivantes sont diagonalisables et les écrire sous la forme PDP^{-1} où $P^{-1} = P^\top$:

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad 2. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 3. \begin{pmatrix} 13 & -12 & -6 \\ -12 & 13 & 6 \\ -6 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 13 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer une base orthonormale de $H = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$.

2. Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1, justifier que J est diagonalisable et déterminer D une matrice diagonale et P une matrice inversible telles que $J = PDP^{-1}$ avec $PP^T = I_n$.

Exercice 14 (*). Déterminer par deux méthodes

$$\inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \{(x-1)^2 + (y-3)^2 + (y-2)^2\}$$

Exercice 15 (**). Soit $a \in \mathbb{R}^n$, on définit $\phi_a: x \mapsto \langle a, x \rangle$.

1. Montrer que l'application $\Psi: a \mapsto \phi_a$ est linéaire de \mathbb{R}^n vers $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
2. Montrer que Ψ est injective.
3. Démontrer que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est de dimension finie et déterminer sa dimension.
4. En déduire que Ψ est un isomorphisme.

Exercice 16 (**). On considère $A = \begin{pmatrix} 12 & 3 & -3 & -3 \\ 3 & 4 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 4 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

1. Justifier que A est diagonalisable.
2. Montrer que $A^2 \in \text{vect}(A, I_4)$ (on pourra calculer A^2 à l'aide d'une calculatrice ou de Python)
3. Montrer que $\text{Sp}(A)$ est inclus dans l'ensemble des solutions d'une équation du second degré.
4. Déterminer une base de $\text{Ker}(A - \lambda I_4)$ où λ est la plus petite des solutions de l'équation du second degré.
5. Démontrer que A admet forcément une autre valeur propre que λ . Que pouvez-vous dire de cet espace propre.
6. En conclure une diagonalisation de A .

Exercice 17 (**). Soit I un intervalle de \mathbb{R} . On note $E = \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de I vers \mathbb{R} qui sont continues sur I . Posons

$$L^2(I) = \left\{ f \in E \mid \int_I f^2 \text{ converge} \right\}.$$

1. Soit $(f, g) \in L^2(I)$, montrer que $\int_I fg$ converge absolument.

2. Montrer que $L^2(I)$ est un sous-espace vectoriel de E .

3. Soit $(f, g) \in L^2(I)$, en vous inspirant de la preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que $\left(\int_I fg \right)^2 \leq \int_I f^2 \int_I g^2$

4. Montrer qu'il y a égalité ssi (f, g) est liée.

5. En adaptant tout ce qui précède, soit X et Y deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2, montrer que XY admet un moment d'ordre 1, que (X, Y) admet une covariance et que $|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$.