

Sujet de révision 2: Agro-véto 2017

Exercice

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de la matrice A .
La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Calculer A^2 et A^3 .
3. On considère $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.
 - (a) Soit α, β et γ trois réels et $M = \alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2$. Vérifier que $M \in \mathcal{S}$.
 - (b) Réciproquement, considérons a, b, c, d, e, f, g, h et i des réels tels que $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$.
Déterminer, en fonction des coefficients de M , trois réels α, β et γ tels que $M = \alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2$.
 - (c) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour appartenir à $\mathcal{S}$.
4. On considère $\mathcal{S}'$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^3 = 0$ et $M^2 \neq 0$.
 - (a) Soit $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible et $M = PAP^{-1}$. Vérifier que $M \in \mathcal{S}'$.
Dans la suite, tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ sera assimilé à une matrice colonne de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de sorte que, pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^3$, le produit matriciel MX soit correctement défini.
 - (b) Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
 - i. Vérifier que $M \in \mathcal{S}'$.
On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont M est la matrice dans la base canonique, c'est-à-dire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, X \mapsto MX$.
 - ii. Prouver qu'il existe un vecteur $X \in \mathbb{R}^3$ tel que M^2X soit non nul.
 - iii. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (X, MX, M^2X)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
 - iv. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
 - v. En déduire qu'il existe $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $M = PAP^{-1}$.
 - (c) On cherche à généraliser ce qui a été montré dans la question précédente. Pour cela on considère $M \in \mathcal{S}'$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont M est la matrice dans la base canonique.
 - i. Prouver qu'il existe un vecteur $X \in \mathbb{R}^3$ tel que M^2X soit non nul.
 - ii. En déduire qu'il existe $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $M = PAP^{-1}$.
 - (d) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour appartenir à $\mathcal{S}'$.

Problème

I. Préliminaires :

Soit n un entier non nul et X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\} = \llbracket 1; n \rrbracket$.

1. Donner, sans justifications, l'espérance de X .
2. Prouver par récurrence que $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. En déduire la variance de X .

On considère une urne contenant N_1 boules blanches et N_2 boules noires indiscernables au toucher. On pose $N = N_1 + N_2$. On répète l'expérience suivante : on tire au hasard une boule dans l'urne et l'on replace dedans deux boules de la couleur obtenue. À l'issue de la première expérience, l'urne contient donc $N + 1$ boules et l'on note X_1 la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne. À l'issue de la deuxième expérience, l'urne contient donc $N + 2$ boules et l'on note X_2 la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne. Plus généralement, pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne à l'issue de la k -ième expérience. Pour tout k non nul, on note B_k l'évènement «la boule tirée lors de la k -ième expérience est blanche».

II. Étude d'un cas particulier :

On suppose ici que $N_1 = N_2 = 1$

1. Déterminer la loi de X_1 .
2. Déterminer la loi de X_2 .
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que X_n suit une loi uniforme sur $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$.
On pourra faire une récurrence et utiliser le système complet $((X_n = k))_{1 \leq k \leq n+1}$ pour déterminer la loi de X_{n+1} .
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité de B_{n+1} .
On pourra utiliser la question précédente et la formule des probabilités totales
5. Pour tout entier n non nul, on considère la variable aléatoire $Y_n = \frac{X_n - 1}{n}$.
 - (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la loi de Y_n .
 - (b) On considère F la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[0, 1]$. Rappeler, pour tout réel x , la valeur de $F(x)$.
 - (c) Soit $x \in [0; 1]$. Prouver que, pour tout entier n , on a $P(Y_n \leq x) = \frac{1}{n+1} \lfloor nx + 1 \rfloor$, où l'on note $\lfloor \cdot \rfloor$ la partie entière.
 - (d) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note F_{Y_n} la fonction de répartition de Y_n . Déduire de ce qui précède, que pour tout réel x , on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Y_n}(x) = F(x)$.

III. Retour au cas général :

1. Déterminer la probabilité des évènements B_1 et B_2 .
2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
 - (a) Montrer que $\sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} kP(X_{n-1} = k) = (N + n - 1)P(B_n)$.
 - (b) Soit $k \in \llbracket N_1; N_1 + n - 1 \rrbracket$. Déterminez la probabilité de B_{n+1} sachant $B_n \cap (X_{n-1} = k)$ puis la probabilité de B_{n+1} sachant $\overline{B_n} \cap (X_{n-1} = k)$
 - (c) En déduire que $P(B_{n+1}) = P(B_n)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire de la question précédente la probabilité de B_n et l'espérance de X_n .