

Problème (Agro-véto 2017)

Préliminaire

1. D'après un résultat de cours, $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$.
2. Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n) : \ll \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \gg$.
 - Pour $n = 1$, $\sum_{k=1}^1 k^2 = 1$, de plus, $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$, de sorte que $\mathcal{P}(1)$ soit vraie.
 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 \\ &\stackrel{\mathcal{P}(n)}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= (n+1) \left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1) \right) \\ &= (n+1) \times \frac{2n^2 + n + 6n + 6}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \end{aligned}$$

Or, en développant, $(n+2)(2(n+1)+1) = (n+2)(2n+3) = 2n^2 + 7n + 6$, ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. On calcule $\mathbb{E}(X^2)$ par la formule de transfert¹,

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^n k^2 \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

D'après la formule de König-Huygens :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{(n+1)}{12} (2(2n+1) - 3(n+1)) = \frac{(n+1)(n-1)}{12} = \frac{n^2 - 1}{12} \end{aligned}$$

II. Étude d'un cas particulier :

On remarque que si B_n est réalisé, cela veut dire que l'on tire une boule blanche et qu'on en rajoute deux, ainsi dans ce cas, le nombre de boules blanches a augmenté de 1 donc $X_{n+1} = X_n + 1$. Si $\overline{B_n}$ n'est pas réalisé, cela veut dire que l'on a tiré une boule noire et qu'on en rajoute deux, ainsi dans ce cas, le nombre de boules blanches n'a pas évolué donc $X_{n+1} = X_n$. Que l'on tire une boule blanche ou une boule noire, dans tous les cas, le nombre total de boules dans l'urne augmente de 1 à chaque tirage. Ainsi, après n tirages, on a rajouté n boules, comme il y avait 2 boules initialement, après n tirages il y a $n+2$ boules.

1. Si on tire une boule blanche au premier tirage, X_1 vaut 2, si on tire une boule noire au premier tirage, alors X_1 vaut 1. Ainsi, $X_1(\Omega) = \{1, 2\}$. Or, $(X_1 = 2) = B_1$, comme les boules sont indiscernables au toucher, $\mathbb{P}(X_1 = 2) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{2}$. Comme $\mathbb{P}(X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 2) = 1$, on en déduit que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Ainsi, X_1 suit une loi uniforme sur $\llbracket 1; 2 \rrbracket$.

1. Pas de condition de convergence car ici la variable aléatoire est finie

2. Comme le nombre de boules blanches augment de un ou reste constant, $X_2(\Omega) = \llbracket 1; 3 \rrbracket$.
- $(X_2 = 1) = \overline{B_1} \cap \overline{B_2}$, ainsi d'après la formule des probabilités composées, $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(\overline{B_1})\mathbb{P}(\overline{B_2}|\overline{B_1})$. Or, $\mathbb{P}(\overline{B_1}) = \frac{1}{2}$ (car il y a initialement une boule noire sur un total de deux boules) et $\mathbb{P}(\overline{B_2}|\overline{B_1}) = \frac{2}{3}$, en effet, si une boule noire est obtenue au premier tirage, au moment de faire le second tirage, il y a deux boules noires sur un total de trois boules. Ainsi, $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.
 - $(X_2 = 3) = B_1 \cap B_2$, ainsi, $\mathbb{P}(X_2 = 3) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2|B_1)$. Or, $\mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{2}$ et si B_1 a été réalisé, alors il y a deux boules blanches dans l'urne sur un total de 3, donc $\mathbb{P}(B_2|B_1) = \frac{2}{3}$ donc $\mathbb{P}(X_2 = 3) = \frac{1}{3}$.
 - Comme $\mathbb{P}(X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_2 = 2) + \mathbb{P}(X_2 = 3) = 1$, on en déduit que $\mathbb{P}(X_2 = 2) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.
- On peut en conclure que X_2 suit une loi uniforme sur $\llbracket 1; 3 \rrbracket$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $\mathcal{P}(n)$: « X_n suit une loi uniforme sur $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$ ».
- On a montré à la question 1, que X_1 suit une loi uniforme sur $\llbracket 1; 2 \rrbracket$, ainsi, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Alors, $X_n(\Omega) = \llbracket 1; n+1 \rrbracket$. Ainsi, suivant que l'on tire une boule blanche ou pas, le nombre de boules blanches dans l'urne augmentera de 1 ou restera constant, de sorte que $X_{n+1}(\Omega) = \llbracket 1; n+2 \rrbracket$. Soit $j \in \llbracket 1; n+2 \rrbracket$, calculons $\mathbb{P}(X_{n+1} = j)$. Alors, comme $((X_n = k))_{1 \leq k \leq n+1}$ est un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j) = \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(X_n = k) \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = k) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = k)$$

Si on veut que $(X_{n+1} = j)$ se réalise, alors ou bien $(X_n = j)$ et on tire une boule noire ou bien $(X_n = j-1)$ et on tire une boule blanche. Or, $(X_n = 0)$ et $(X_n = n+2)$ sont impossibles on distingue donc les cas :

— Si $j \in \llbracket 2; n+1 \rrbracket$, alors pour tout $k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket \setminus \{j-1, j\}$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = k) = 0$, donc

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j) = \frac{1}{n+1} (\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = j-1) + \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = j))$$

Or, $\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = j-1) = \mathbb{P}(B_{n+1} | X_n = j-1)$. or, si $(X_n = j-1)$ est réalisé il y a un total de $j-1$ boules blanches sur un total de $n+2$. Donc, $\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = j-1) = \mathbb{P}(B_{n+1} | X_n = j-1) = \frac{j-1}{n+2}$. De même, $\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = j) = \mathbb{P}(\overline{B_{n+1}} | X_n = j)$. Or, si $(X_n = j)$ est réalisé il y a un total de j boules blanches sur un total de $n+2$ et donc il y a $(n+2) - j$ boules noires, donc $\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = j) = \mathbb{P}(\overline{B_{n+1}} | X_n = j) = \frac{n+2-j}{n+2}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{j-1}{n+2} + \frac{n+2-j}{n+2} \right) = \frac{1}{n+2}.$$

— Calculons $\mathbb{P}(X_{n+1} = n+2)$. Pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = n+2 | X_n = k) = 0$ donc, $\mathbb{P}(X_{n+1} = n+2) = \frac{1}{n+1} \mathbb{P}(X_{n+1} = n+2 | X_n = n+1)$. Or, si $(X_n = n+1)$ est réalisé, il y a un total de $n+1$ boules blanches sur un total de $n+2$, donc $\mathbb{P}(X_{n+1} = n+2 | X_n = n+1) = \frac{n+1}{n+2}$ donc $\mathbb{P}(X_{n+1} = n+2) = \frac{1}{n+2}$.

— Calculons $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1)$. Comme $\sum_{j=1}^{n+2} \mathbb{P}(X_{n+1} = j) = 1$, on en déduit que $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = 1 - \sum_{j=2}^{n+2} \frac{1}{n+2} = 1 - \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}$.

Ainsi, X_{n+1} suit une loi uniforme sur $\llbracket 1; n+2 \rrbracket$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit une loi uniforme sur $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$.

4. En utilisant le système complet d'événements $((X_n = k))_{1 \leq k \leq n+1}$, d'après la formule des probabilités totales : $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(B_{n+1} | X_n = k) \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(B_{n+1} | X_n = k)$. Or, si $(X_n = k)$ est

réalisé, il y a k boules blanches sur un total de $n + 2$ donc $\mathbb{P}(B_{n+1}|X_n = k) = \frac{k}{n+2}$, de sorte que

$$\mathbb{P}(B_{n+1}) = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \times \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{1}{2}$$

5. (a) On détermine tout d'abord l'univers image de Y_n :

$$\begin{aligned} Y_n(\Omega) &= \left\{ \frac{x-1}{n} \mid x \in X_n(\Omega) \right\} = \left\{ \frac{k-1}{n} \mid k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket \right\} = \left\{ \frac{j}{n} \mid j \in \llbracket 0; n \rrbracket \right\} \\ &= \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1 \right\} \end{aligned}$$

Soit $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$,

$$\mathbb{P}\left(Y_n = \frac{j}{n}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{X_n-1}{n} = \frac{j}{n}\right) = \mathbb{P}(X_n = j+1) \underset{j+1 \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket}{=} \frac{1}{n+1}$$

ainsi, Y_n suit une loi uniforme sur $\left\{ \frac{j}{n} \mid j \in \llbracket 0; n \rrbracket \right\}$

(b) D'après le cours, $F(x) = 0$ si $x < 0$, $F(x) = x$ si $x \in [0; 1]$, $F(x) = 1$ si $x > 1$.

(c) Soit $x \in [0; 1]$, comme X_n prend des valeurs entières :

$$\mathbb{P}(Y_n \leq x) = \mathbb{P}\left(\frac{X_n-1}{n} \leq x\right) = \mathbb{P}(X_n \leq nx+1) = \sum_{k=1}^{\lfloor nx+1 \rfloor} \mathbb{P}(X_n = k)$$

Soit $k \in \llbracket 1; \lfloor nx+1 \rfloor \rrbracket$. Comme, $1 \leq k \leq \lfloor nx+1 \rfloor \leq n+1$ donc $\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n+1}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(X_n \leq nx+1) = \sum_{k=1}^{\lfloor nx+1 \rfloor} \frac{1}{n+1} = \frac{\lfloor nx+1 \rfloor}{n+1}$$

(d) • Si $x < 0$, $F_{Y_n}(x) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 = F(x)$.

• Si $x > 1$, $F_{Y_n}(x) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 = F(x)$.

• Si $x \in [0; 1]$, alors, en utilisant la question précédente, $\frac{nx+1-1}{n+1} < F_{Y_n}(x) \leq \frac{nx+1}{n+1}$, si $x > 0$, alors $\frac{nx+1}{n+1} \sim \frac{nx}{n} = x$ et $\frac{nx+1-1}{n+1} \sim \frac{nx}{n} = x$, ainsi, $(F_{Y_n}(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est encadrée par deux suites convergentes vers x , d'après le théorème des gendarmes, $F_{Y_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x = F(x)$.

Si $x = 0$, $F_{Y_n}(x) = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 = F(0)$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_{Y_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. (cela veut dire que $(Y_n)_n$ converge en loi vers une loi uniforme sur $[0; 1]$).

III. Retour au cas général :

1. $\mathbb{P}(B_1) = \frac{N_1}{N}$ (car il y a N_1 boules blanches sur un total de N boules et que le tirage est uniforme). B_1 et $\overline{B_1}$ forment un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_2|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2|\overline{B_1})\mathbb{P}(\overline{B_1}) = \mathbb{P}(B_2|B_1)\frac{N_1}{N} + \mathbb{P}(B_2|\overline{B_1})\frac{N_2}{N}$$

Si B_1 est réalisé, au moment de faire le deuxième tirage il y a $N_1 + 1$ boules blanches sur un total de $N + 1$ donc $\mathbb{P}(B_2|B_1) = \frac{N_1 + 1}{N + 1}$. De même, $\mathbb{P}(B_2|\overline{B_1}) = \frac{N_1}{N + 1}$. Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_2) &= \frac{N_1 + 1}{N + 1} \times \frac{N_1}{N} + \frac{N_1}{N + 1} \times \frac{N_2}{N} \\ &= \frac{N_1(N_1 + 1 + N_2)}{N(N + 1)} = \frac{N_1}{N} \end{aligned}$$

- (a) Réaliser B_n dépend de ce qu'il y a dans l'urne au moment de réaliser le n -ième tirage, on utilise donc le système complet d'événements associées des valeurs de X_{n-1} . Or, $X_{n-1}(\Omega) = \llbracket N_1 ; N_1 + n - 1 \rrbracket$. En effet, si on a tiré que des boules noires, $X_{n-1} = N_1$, si on a tiré que des boules blanches, $X_{n-1} = N_1 + (n - 1)$, comme ce sont les cas extrêmes, $X_{n-1}(\Omega) \subset \llbracket N_1 ; N_1 + n - 1 \rrbracket$. Réciproquement, si $k \in \llbracket N_1 ; N_1 + n - 1 \rrbracket$. Alors, si on tire $N_1 - k$ boules blanches lors des $N_1 - k$ premiers tirages et que des boules noires ensuite, alors $(X_{n-1} = k)$ est réalisé. Donc $\llbracket N_1 - 1 ; N_1 + n - 1 \rrbracket \subset X_{n-1}(\Omega)$. Ainsi, $((X_{n-1} = k))_{N_1 \leq k \leq N_1 + n - 1}$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(B_n) = \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} \mathbb{P}(B_n | X_{n-1} = k) \mathbb{P}(X_{n-1} = k)$$

Or, s'il y a k boules blanches sur un total de $N + n - 1$, la probabilité de tirer une boule blanche vaut $\mathbb{P}(B_n | X_{n-1} = k) = \frac{k}{N + n - 1}$. Ainsi, comme $N + n - 1$ ne dépend pas de k , par linéarité de la somme :

$$(N + n - 1) \mathbb{P}(B_n) = \sum_{k=N_1}^{N+n-1} k \mathbb{P}(X_{n-1} = k)$$

- (b) $\mathbb{P}(B_{n+1} | B_n \cap X_{n-1} = k) = \frac{k+1}{N+n}$ En effet, si $B_n \cap X_{n-1} = k$ est réalisé, il y a $k+1$ boules blanches sur un total de $N+n$. De même, $\mathbb{P}(B_{n+1} | \overline{B_n} \cap (X_{n-1} = k)) = \frac{k}{N+n}$, si $\overline{B_n} \cap (X_{n-1} = k)$ est réalisé, il y a k boules blanches sur un total de $N+n$.

(c)

2.