

Problème 1

Dans tout le problème, σ désigne un réel strictement positif. La partie A est consacrée à l'étude de trois fonctions, l'une d'entre elles étant une densité de probabilité. Cette dernière est une densité d'une variable aléatoire réelle construite dans la partie B en utilisant deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant la même loi normale. On démontre dans la partie C que cette variable aléatoire réelle admet des moments de tous ordres. Après avoir donné une expression de ces moments, et à l'aide de deux autres suites, on obtient dans la partie D un équivalent du coefficient binomial $\binom{2p}{p}$ lorsque p tend vers $+\infty$. Les parties A, B, C et D sont largement indépendantes bien que la partie D utilise certains résultats (donnés dans l'énoncé) de la partie C.

Partie A : Étude de trois fonctions

On considère les trois fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$ par :

$$f_{\sigma}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}, \quad g(x) = xe^{-x}, \quad h(x) = \frac{2}{ex}$$

$\mathcal{C}_{\sigma}$ désigne la courbe représentative de f_{σ} et $\mathcal{H}$ la courbe représentative de h .

1. Démontrer que f_{σ} est une fonction de densité.
2. (a) Démontrer que g admet un maximum que l'on déterminera.
(b) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_{\sigma}(x) \leq h(x)$$

- (c) Étudier le cas d'égalité dans l'inégalité précédente puis montrer que pour tout $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$, les courbes $\mathcal{C}_{\sigma}$ et $\mathcal{H}$ ont une tangente commune dont on donnera une équation cartésienne.

Partie B : Une nouvelle loi

1. Soit N_1 une variable aléatoire réelle suivant la loi normale de paramètres 0 et σ^2 . On note M la variable aléatoire réelle définie par :

$$M = N_1^2$$

- (a) En notant F_{N_1} la fonction de répartition de N_1 , démontrer que M est une variable aléatoire réelle à densité dont la fonction de répartition est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_M(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ F_{N_1}(\sqrt{x}) - F_{N_1}(-\sqrt{x}) & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

- (b) En déduire une densité de M .
2. À l'aide du changement de variable $t = \frac{\lambda}{2}(1 + \sin \theta)$ (et en vérifiant avec soin les hypothèses du théorème utilisé) démontrer que :

$$\forall \lambda > 0, \quad \int_0^{\lambda} \frac{dt}{\sqrt{t(\lambda - t)}} = \pi$$

3. Soit N_2 une variable aléatoire réelle de même loi que N_1 et indépendante de cette dernière. On note S et Z les variables aléatoires réelles définies par :

$$S = M + N_2^2 \text{ et } Z = \sqrt{S}$$

On rappelle qu'une densité de la somme de deux variables aléatoires réelles indépendantes, chacune ayant pour densité f_X et f_Y est donnée par le produit de convolution :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(x-t)dt$$

- (a) Démontrer que S est une variable aléatoire réelle à densité dont une densité est donnée par la fonction :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- (b) En déduire que Z est une variable aléatoire à densité dont une densité est f_σ (cf. partie A).

Partie C : Suite des moments

On considère dorénavant que $\sigma = 1$. Soit Z une variable aléatoire réelle dont f_1 est une densité. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note u_k le nombre réel (s'il existe) :

$$u_k = \mathbf{E} \left(Z^k \right)$$

- (a) Démontrer que $u_0 = 1$ puis, à l'aide d'intégrations par parties, que $u_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et $u_2 = 2$.
(b) En déduire que Z admet une espérance et une variance que l'on calculera.
- (a) Démontrer que u_k existe pour tout $k \in \mathbb{N}$ en établissant la relation ci-dessous :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad u_{k+1} = (k+1)u_{k-1} \quad \frac{2}{5}$$

- (b) En déduire que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad u_{2p} = 2^p p! \quad \text{et} \quad u_{2p+1} = \frac{(2p+1)!}{2^p p!} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

- (c) En déduire enfin que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k u_{k+1} = (k+1)! \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Partie D : Étude de deux autres suites et calculs d'équivalents

On considère enfin les suites définies par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad v_k = \frac{k!}{u_k^2} \quad \text{et} \quad w_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k(t) dt$$

- Donner un équivalent simple de $v_k v_{k+1}$ lorsque k tend vers $+\infty$.
- (a) Établir une relation de récurrence liant, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, v_{k+1} et v_{k-1} .
(b) Calculer w_0, w_1 puis démontrer que la suite w vérifie la même relation de récurrence que v .
(c) En déduire que les suites v et w sont égales.
- (a) Démontrer que la suite w est décroissante.

(b) En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{k}{k+1} \leq \frac{v_{k+1}}{v_k} \leq 1$$

(c) En déduire également que $v_{k+1} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} v_k$ puis établir que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \binom{2p}{p} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4^p}{\sqrt{p\pi}}$$

Problème 2

Dans tout le problème n désigne un entier naturel. Dans la partie A du problème, on s'intéresse à quelques propriétés d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On en cherche en particulier deux bases et on écrit la matrice de passage de l'une vers l'autre. Ces matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont utilisées dans la partie B pour construire «par blocs» une matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dont on calcule les puissances n -ièmes et dont on détermine la diagonalisabilité. Enfin, dans la partie C, on utilise une telle matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ pour étudier le déplacement d'un soldat dans un fort et en donner une interprétation géométrique. Les parties A et B sont largement indépendantes mais la partie C utilise un résultat de la partie B.

Partie A : Un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On se place dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on considère l'ensemble de matrices défini par :

$$\mathcal{E} = \left\{ M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

- (a) Justifier que toute matrice appartenant à $\mathcal{E}$ est diagonalisable.
(b) Démontrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
(c) Démontrer enfin que toutes les matrices de $\mathcal{E}$ commutent entre elles.
- Soient les quatre matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- (a) Vérifier que $\mathcal{B} = (I, J)$ est une base de $\mathcal{E}$. Quelle est la dimension de $\mathcal{E}$?
(b) Quelles sont les coordonnées de $M_{a,b}$ dans cette base $\mathcal{B}$?
- (a) Démontrer que $\mathcal{B}' = (U, V)$ est également une base de $\mathcal{E}$ et déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.
(b) Calculer U^n et V^n (pour $n \neq 0$) et le produit UV .
(c) Déterminer enfin les coordonnées de $M_{a,b}^n$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Partie B : Une matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par quatre «blocs» qui sont des matrices de $\mathcal{E}$ (cf. partie A) :

$$A = \begin{pmatrix} c & 0 & a & b \\ M_{c,0} & M_{a,b} \\ M_{0,0} & M_{d,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 & a & b \\ 0 & c & b & a \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

- On suppose que $c = d$.
(a) Quel est le spectre de A ?
(b) Déterminer à quelle condition nécessaire et suffisante, A est diagonalisable.
- On suppose que $c \neq d$.

(a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} M_{c^n,0} & \frac{d^n - c^n}{d-c} M_{a,b} \\ M_{0,0} & M_{d^n,0} \end{pmatrix}$$

(b) Déterminer les deux sous-espaces propres de A .

(c) En déduire qu'il existe une matrice $Q \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, que l'on écrira à l'aide de quatre «blocs» de $\mathcal{E}$, et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que :

$$A = QDQ^{-1}$$

Partie C : Quatre tours et un soldat

Un fort est constitué de quatre tours notées T_1, T_2, T_3 et T_4 . Ce fort est gardé en permanence par un soldat et à chaque relève, le successeur remplace le soldat relevé à la tour où ce dernier se trouvait. Des passages permettent de se déplacer d'une tour à l'autre. On admet que, à chaque heure :

- si le soldat de garde est en T_1 alors il reste toujours en T_1 .
- si le soldat de garde est en T_2 alors il reste toujours en T_2 .
- si le soldat de garde est en T_3 , alors il se rend en T_1 avec une probabilité de $\frac{3}{20}$.
- si le soldat de garde est en T_3 , alors il se rend en T_2 avec une probabilité de $\frac{1}{20}$.
- si le soldat de garde est en T_3 , alors il ne se rend jamais en T_4 .
- si le soldat de garde est en T_4 , alors il se rend en T_1 avec une probabilité de $\frac{1}{20}$.
- si le soldat de garde est en T_4 , alors il se rend en T_2 avec une probabilité de $\frac{3}{20}$.
- si le soldat de garde est en T_4 , alors il ne se rend jamais en T_3 .

On note $X_n \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne dont le i -ième coefficient (pour $i \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$) est la probabilité que le soldat de garde se trouve à l'heure n à la tour T_i . On note enfin α_n le premier coefficient de X_n , β_n son second coefficient et γ_n son troisième coefficient. En particulier, à l'instant initial, la position du soldat est donnée par $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0) \in [0, 1]^3$ tel que $0 \leq \alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 \leq 1$.

1. (a) Déterminer le quatrième coefficient de X_n , noté δ_n , en fonction de α_n , β_n et γ_n .
- (b) Démontrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ (à écrire à l'aide de quatre «blocs» de $\mathcal{E}$) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n.$$

- (c) Expliciter A^n et en déduire une expression de X_n en fonction de $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ et n .
2. On munit l'espace usuel d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note M_n le point de coordonnées $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$.
 - (a) Démontrer que M_n est situé à l'intérieur d'un tétraèdre $\mathcal{T}$ dont on précisera les sommets.
 - (b) Démontrer que M_n est barycentre des quatre sommets de $\mathcal{T}$ et en préciser des coefficients.
 - (c) Démontrer que si M_0 est le point moyen des quatre sommets de $\mathcal{T}$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n = 0$$

Interpréter ces limites en termes de position limite du point M_n et en termes probabilistes.

Remarque 1. Les questions 2(a) et 2(b) sont, à mon humble avis, pas dans l'esprit du programme de BCPST, vous pouvez les sauter et remplacer la question 2(c) par «si $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = \delta_0 = \frac{1}{4}$, montrer que $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$, $\beta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$, $\gamma_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et interpréter ces limites en termes de probabilités».