

Problème 2 (G2E 2019)

Partie A : Un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

1. (a) Soit $M \in \mathcal{E}$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$. Comme a et b sont réels, M est à coefficients réels, de plus, $M^\top = M$, ainsi M est symétrique. Donc d'après le théorème spectral, M est diagonalisable.
(b)
 - $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}(\mathbb{R})$.
 - Posons $(a, b) = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$, ainsi $0_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$.
 - Soit $(A, B) \in \mathcal{E}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ et il existe $(a', b') \in \mathbb{R}^2$ tel que $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & a' \end{pmatrix}$. Donc, $\lambda A + B = \begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda b + b' \\ \lambda b + b' & \lambda a + a' \end{pmatrix}$, on pose donc $a'' = \lambda a + a' \in \mathbb{R}$ et $b'' = \lambda b + b' \in \mathbb{R}$ donc $\lambda A + B = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ b'' & a'' \end{pmatrix}$, ceci prouve que $\lambda A + B \in \mathcal{E}$.

Par conséquent, $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- (c) Soit $(A, B) \in \mathcal{E}^2$, alors il existe $(a, a', b, b') \in \mathbb{R}^4$ tel que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & a' \end{pmatrix}$, alors

$$AB = \begin{pmatrix} aa' + bb' & ab' + ba' \\ ba' + ab' & bb' + aa' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad BA = \begin{pmatrix} a'a + b'b & a'b + b'a \\ b'a + a'b & b'b + a'a \end{pmatrix}$$

On observe ainsi que $AB = BA$. Ainsi, toutes les matrices de $\mathcal{E}$ commutent entre elles.

2. (a) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors on observe que $aI + bJ = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = M_{a,b}$, ainsi :

$$\mathcal{E} = \{aI + bJ \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{vect}(I, J)$$

Par conséquent, $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de $\mathcal{E}$, comme I et J sont non colinéaires, $\mathcal{B}$ est une famille de deux vecteurs et ces deux vecteurs sont non colinéaires donc $\mathcal{B}$ est libre. Ainsi, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{E}$, on peut donc en conclure que $\dim(\mathcal{E}) = \text{Card}(\mathcal{B}) = 2$.

- (b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, comme $M_{a,b} = aI + bJ$, les coordonnées de $M_{a,b}$ dans la base $\mathcal{B}$ sont a et b :
 $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(M_{a,b}) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
3. (a) On remarque que $U = M(1/2, 1/2) \in \mathcal{E}$ et $V = M(1/2, -1/2) \in \mathcal{E}$, de plus, U et V sont non colinéaires, de sorte que $\mathcal{B}'$ soit une famille libre de $\mathcal{E}$. De plus, $\text{Card}(\mathcal{B}') = 2 = \dim(\mathcal{E})$, ainsi, $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathcal{E}$.
 - $U = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}J$
 - $V = \frac{1}{2}I + J \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Ainsi, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ est $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

- (b)
 - On remarque que $U^2 = U$, en multipliant cette égalité par U^{n-1} (avec $n \in \mathbb{N}^*$), on obtient $U^{n+1} = U^n$, ainsi, $(U^n)_{n \geq 1}$ est constante. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U^n = U^1 = U$.
 - On remarque que $V^2 = V$, posons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$: « $V^n = V$ », $\mathcal{P}(1)$ donc $\mathcal{P}(2)$ sont vraies. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, alors $V^{n+1} = V^n \times V = V \times V = V$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V^n = V$.
 - Par produit, $UV = 0_2$
- (c) $M_{a,b} = (a+b)U + (a-b)V$, comme $(a+b)U$ et $(a-b)V$ sont dans $\mathcal{E}$, $(a+b)U$ et $(a-b)V$

commutent, ainsi, d'après le binôme de Newton :

$$\begin{aligned} M_{a,b}^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} ((a+b)U)^k ((a-b)V)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a+b)^k (a-b)^{n-k} U^k V^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (a+b)^k (a-b)^{n-k} \underbrace{UV}_{=0_2} + (a-b)^n V^n + (a+b)^n U^n = (a-b)^n V + (a+b)^n U \end{aligned}$$

Ainsi, les coordonnées de $M_{a,b}^n$ dans $\mathcal{B}'$ sont $(a+b)^n$ et $(a-b)^n$: $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(M_{a,b}^n) = \begin{pmatrix} (a+b)^n \\ (a-b)^n \end{pmatrix}$.

Partie B : Une matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

1. (a) Comme A est triangulaire, son spectre est l'ensemble des coefficients diagonaux, donc $\text{Sp}(A) = \{c\}$.
- (b) Si A est diagonalisable, alors comme $\text{Sp}(A) = \{c\}$, il existe P une matrice inversible et D une matrice diagonale telle que $A = PDP^{-1}$ avec la diagonale de D qui contient les valeurs propres, donc ici $D = cI_4$, donc $A = P(cI_4)P^{-1} = c(PP^{-1}) = cI_4$. Par unicité des coefficients d'une matrice, $a = b = 0$. Réciproquement, si $a = b = 0$, alors A est diagonale donc diagonalisable.

Ainsi, A est diagonalisable si et seulement si $a = b = 0$.

2. (a) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$:

$$\ll A^n = \begin{pmatrix} c^n & 0 & \frac{d^n - c^n}{d - c}a & \frac{d^n - c^n}{d - c}b \\ 0 & c^n & \frac{d^n - c^n}{d - c}b & \frac{d^n - c^n}{d - c}a \\ 0 & 0 & d^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d^n \end{pmatrix} \gg$$

$$\bullet \text{ Pour } n = 0, \begin{pmatrix} c^n & 0 & \frac{d^n - c^n}{d - c}a & \frac{d^n - c^n}{d - c}b \\ 0 & c^n & \frac{d^n - c^n}{d - c}b & \frac{d^n - c^n}{d - c}a \\ 0 & 0 & d^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4 = A^0 \text{ Ainsi, } \mathcal{P}(0) \text{ est}$$

vraie.

- $\bullet$ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A = \begin{pmatrix} c^n & 0 & \frac{d^n - c^n}{d - c}a & \frac{d^n - c^n}{d - c}b \\ 0 & c^n & \frac{d^n - c^n}{d - c}b & \frac{d^n - c^n}{d - c}a \\ 0 & 0 & d^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & 0 & a & b \\ 0 & c & b & a \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c^n \times c & 0 & c^n \times a + \frac{d^n - c^n}{d - c}a \times d & c^n \times b + \frac{d^n - c^n}{d - c}b \times d \\ 0 & c^n \times c & c^n \times b + \frac{d^n - c^n}{d - c}b \times d & c^n \times a + \frac{d^n - c^n}{d - c}a \times d \\ 0 & 0 & d^n \times d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d^n \times d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or, $c^n \times c = c^{n+1}$ et $d^n \times d = d^{n+1}$. De plus,

$$c^n \times a + \frac{d^n - c^n}{d - c}a \times d = \frac{c^n a(d - c) + ad(d^n - c^n)}{d - c} = \frac{d^{n+1}a - c^{n+1}a}{d - c} = \frac{d^{n+1} - c^{n+1}}{d - c}a$$

De même, en remplaçant a par b , on a ainsi montré que :

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} c^{n+1} & 0 & \frac{d^{n+1} - c^{n+1}}{d - c}a & \frac{d^{n+1} - c^{n+1}}{d - c}b \\ 0 & c^{n+1} & \frac{d^{n+1} - c^{n+1}}{d - c}b & \frac{d^{n+1} - c^{n+1}}{d - c}a \\ 0 & 0 & d^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d^{n+1} \end{pmatrix}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

- (b) Comme A est triangulaire, son spectre est l'ensemble des coefficients diagonaux de A , donc $\text{Sp}(A) = \{c, d\}$.

- Déterminons l'espace propre de A associé à c : Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} X \in E_c(A) &\iff (A - cI_4)X = 0_{4,1} \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & b & a \\ 0 & 0 & d-c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0_{4,1} \\ &\iff \begin{pmatrix} az + bt \\ bz + at \\ (d-c)z \\ (d-c)t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} az + bt = 0 \\ bz + at = 0 \\ (d-c)z = 0 \\ (d-c)t = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow{d-c \neq 0} \begin{cases} az + bt = 0 \\ bz + at = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \iff z = t = 0 \\ &\iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff X \in \text{vect}(\mathcal{B}_c) \end{aligned}$$

Où on pose $\mathcal{B}_c = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. Ceci démontre $E_c(A) = \text{vect}(\mathcal{B}_c)$, donc que $\mathcal{B}_c$ est une famille

génératrice de $E_c(A)$, comme c'est une famille de deux vecteurs et que ces deux vecteurs sont non colinéaires, $\mathcal{B}_c$ est libre. Ainsi, $\mathcal{B}_c$ est une base de $E_c(A)$.

- Déterminons l'espace propre de A associé à d :

$$A - dI_4 = \begin{pmatrix} c-d & 0 & a & b \\ 0 & c-d & b & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons que $A - dI_4$ est échelonnée et à deux pivots (car $c-d \neq 0$), donc $\text{rg}(A - dI_4) = 2$. D'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(A - dI_4)) = 4 - \text{rg}(A - dI_4) = 2$ donc $\dim(E_d(A)) = 2$.

Remarquons que $C_3 = \frac{a}{c-d}C_1 + \frac{b}{c-d}C_2$, ainsi

$$aC_1 + bC_2 + (d-c)C_3 + 0C_4 = 0_{4,1}$$

On peut alors vérifier que $U_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ d-c \\ 0 \end{pmatrix} \in E_d(A)$. De même, $C_4 = \frac{b}{c-d}C_1 + \frac{a}{c-d}C_2$

$$bC_1 + aC_2 + 0C_3 + (d-c)C_4 = 0_{4,1}$$

On peut alors vérifier que $U_2 = \begin{pmatrix} b \\ a \\ 0 \\ d-c \end{pmatrix} \in E_d(A)$. Or, U_1 et U_2 sont non colinéaires, donc $\mathcal{B}_d =$

(U_1, U_2) est une famille libre de $E_d(A)$ comme $\dim(E_d(A)) = 2 = \text{Card}(\mathcal{B}_d)$, on en déduit que $\mathcal{B}_d$ est une base de $E_d(A)$.

- (c) Comme $\dim(E_c(A)) + \dim(E_d(A)) = 2 + 2 = 4$, on peut en déduire que A est diagonalisable, la juxtaposition de $\mathcal{B}_c$ et de $\mathcal{B}_d$ est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ de vecteurs propres de A . Ainsi, $A = QDQ^{-1}$

avec

$$D = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & b & a \\ 0 & 0 & d-c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{1,0} & M_{a,b} \\ M_{0,0} & M_{d-c,0} \end{pmatrix}$$

Partie C : Quatre tours et un soldat

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $i \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$, on note $T_{i,n}$ l'évènement «le soldat est à la tour i à l'heure n », de sorte que $\alpha_n = \mathbb{P}(T_{1,n})$, $\beta_n = \mathbb{P}(T_{2,n})$, $\gamma_n = \mathbb{P}(T_{3,n})$ et $\delta_n = \mathbb{P}(T_{4,n})$

Comme à l'heure n le soldat se trouve à exactement l'une des quatre tours, $(T_{1,n}, T_{2,n}, T_{3,n}, T_{4,n})$ forment un système complet d'évènements. Donc $1 = \mathbb{P}(T_{1,n}) + \mathbb{P}(T_{2,n}) + \mathbb{P}(T_{3,n}) + \mathbb{P}(T_{4,n})$ donc $1 = \alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \delta_n$, ainsi, $\delta_n = 1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n$.

- (b) Comme $(T_{1,n}, T_{2,n}, T_{3,n}, T_{4,n})$ est un système complet d'évènements, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \mathbb{P}(T_{1,n+1}) = \sum_{i=1}^4 \mathbb{P}(T_{1,n+1}|T_{i,n})\mathbb{P}(T_{i,n}) = 1 \cdot \alpha_n + 0\beta_n + \frac{3}{20}\gamma_n + \frac{1}{20}\delta_n \\ \beta_{n+1} &= \mathbb{P}(T_{2,n+1}) = \sum_{i=1}^4 \mathbb{P}(T_{2,n+1}|T_{i,n})\mathbb{P}(T_{i,n}) = 0 \cdot \alpha_n + 1\beta_n + \frac{1}{20}\gamma_n + \frac{3}{20}\delta_n \\ \gamma_{n+1} &= \mathbb{P}(T_{3,n+1}) = \sum_{i=1}^4 \mathbb{P}(T_{3,n+1}|T_{i,n})\mathbb{P}(T_{i,n}) = 0 \cdot \alpha_n + 0 \cdot \beta_n + \frac{4}{5}\gamma_n + 0\delta_n \\ \delta_{n+1} &= \mathbb{P}(T_{4,n+1}) = \sum_{i=1}^4 \mathbb{P}(T_{4,n+1}|T_{i,n})\mathbb{P}(T_{i,n}) = 0 \cdot \alpha_n + 0\beta_n + 0 \cdot \gamma_n + \frac{4}{5}\delta_n \end{aligned}$$

Les $\frac{4}{5}$ étant obtenus grâce à $\sum_{i=1}^4 \mathbb{P}(T_{i,n+1}|T_{3,n}) = 1$ et $\sum_{i=1}^4 \mathbb{P}(T_{i,n+1}|T_{4,n}) = 1$. On pose alors

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{20} & \frac{1}{20} \\ 0 & 1 & \frac{1}{20} & \frac{3}{20} \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{1,0} & M_{\frac{3}{20}, \frac{1}{20}} \\ M_{0,0} & M_{\frac{4}{5}, 0} \end{pmatrix}$$

Et on constate que $AX_n = X_{n+1}$.

- (c) Avec les notations de la partie B, on pose $c = 1$, $d = \frac{4}{5}$, $a = \frac{3}{20}$ et $b = \frac{1}{20}$. Comme $c \neq d$, on peut appliquer le résultat de la partie B, question 2a. Ici

$$\frac{d^n - c^n}{d - c} = \frac{c^n - d^n}{c - d} = \frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n}{\frac{1}{5}} = 5 \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$$

pour $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4} \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right) & \frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right) \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right) & \frac{3}{4} \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right) \\ 0 & 0 & \left(\frac{4}{5}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{4}{5}\right)^n \end{pmatrix}$$

Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n) : \langle X_n = A^n X_0 \rangle$, pour $n = 0$, $A^n X_0 = I_2 X_0 = X_0$ de sorte que $\mathcal{P}(0)$ soit vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, alors $X_{n+1} = AX_n = A(A^n X_0) = A^{n+1} X_0$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. De plus, $X_0 =$

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \\ 1 - \alpha_0 - \beta_0 - \gamma_0 \end{pmatrix}.$$