

Révision semaine 2

Lundi

On pose $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ telle que la matrice de f dans les bases canoniques de \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^2 soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On note \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^3 et \mathcal{C} celle de \mathbb{R}^2 .

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, déterminer la valeur de $f(x, y, z)$.
2. Déterminer une base du noyau de f , en déduire le rang de f .
3. On note \mathcal{B}' la juxtaposition des deux premiers vecteurs de \mathcal{B} et de la base de $\text{Ker} f$ déterminée à la question précédente. Démontrer que \mathcal{B}' est une base de \mathbb{R}^3 .
4. Soit \mathcal{C}' la famille des images des deux premiers vecteurs de \mathcal{B} par f . Justifier que \mathcal{C}' est une base de \mathbb{R}^2 .
5. Déterminer A' la matrice de f dans les bases \mathcal{B}' et \mathcal{C}' .

Mardi

On pose, pour $x \neq 0$, $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $f(0) = 0$.

1. Démontrer que f est continue sur \mathbb{R} .
2. Démontrer que f est dérivable sur \mathbb{R}^* et déterminer $f'(x)$ pour $x \neq 0$.
3. Démontrer que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.
4. Démontrer que la fonction f n'est pas de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
5. Quelle est la moralité de l'histoire du jour ?

Mercredi

Soit X suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$ et Y une loi de Poisson de paramètre $\lambda \geq 0$ avec X et Y indépendantes. Calculer $\mathbb{E}(X + Y)$, $\mathbb{V}(X - Y)$ et $\mathbb{P}(X = Y)$.

Jedi

On pose, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 + y^2$.

1. Justifier que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 et déterminer ses dérivées partielles.
2. Déterminer ses dérivées partielles.
3. En calculant $f(x, 0)$ et $f(0, x)$, conclure sur la nature de $(0, 0)$ (maximum local ? minimum local ? autre ?)
4. En calculant $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + x, y\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ conclure sur la nature de tous les points critiques de f .

Vendredi

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit une loi de Poisson de paramètres $1/n$. Montrer que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on déterminera la loi.

Révision informatique semaine 1

Lundi

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $[0; 1]$, écrire une fonction `SimulZ` qui renvoie une simulation de $Z = X + Y$. À l'aide de Python, déterminer une valeur approchée de $\mathbb{P}(Z \leq 0.5)$.

Mardi

On considère une pièce qui fait Pile avec probabilité $p \in]0; 1[$ Face avec probabilité $q = 1 - p$. Soit n un entier non nul fixé. On considère n joueurs qui lancent chacun la pièce jusqu'à obtenir Pile. Le(s) gagnant(s) sont ceux qui ont fait le moins de lancers. Pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on pose X_i le nombre de lancers du i -ème joueur, et on note N le nombre de gagnants.

1. Écrire une fonction `SimulerXi(p)` qui simule la variable X_i .
2. Écrire une fonction `NombreMin(L)` qui renvoie le nombre de fois où la valeur minimal apparaît dans la liste L .
3. En déduire une fonction `SimulerN(p,n)` qui simule N .

Mercredi

Soit N un entier supérieur ou égal à 2. On considère une urne contenant N boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à N . On procède à des tirages successifs d'une boule avec remise de la boule dans l'urne avant le tirage suivant. On note pour tout $k \geq 1$, X_k le numéro obtenu au k -ème tirage, et Z_k le nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages.

1. Écrire une fonction Python `NbDiff(L)` prenant en argument une liste L et qui renvoie le nombre d'éléments distincts présents dans cette liste.
2. Écrire une fonction Python `Z(N,k)` qui, prenant en arguments les valeurs de N et k , et renvoie une simulation de Z_k .
3. Estimer l'espérance de Z_k à l'aide de votre programme, et conjecturer son comportement lorsque :
 - (a) $N = 10$ et $k \rightarrow +\infty$
 - (b) $k = 10$ et $N \rightarrow +\infty$
 - (c) $N = k \rightarrow +\infty$

Jeudi

On lance indéfiniment une pièce équilibrée. On s'intéresse au rang du lancer auquel on obtient pour la première fois la succession des résultats «Pile, Pile, Face», dans cet ordre. On note alors X la variable aléatoire égale au rang du lancer où, pour la première fois, on obtient cette configuration. Si celle-ci n'est jamais obtenue, on convient que X vaut -1 . Par exemple, si on obtient dans cet ordre : Pile, Face, Face, Pile, Pile, Pile, Face, alors X prend la valeur 7.

1. Écrire une fonction Python sans argument qui simule les lancers de dés jusqu'à l'apparition de la séquence « Pile, Pile, Face » et qui renvoie sous forme de liste les résultats de tous les lancers réalisés.
2. Utiliser la fonction précédente pour émettre une conjecture quant à l'existence et la valeur éventuelle de l'espérance de X .
3. Utiliser la simulation de X pour avoir une approximation de $\mathbb{P}(X = 3)$, est-ce cohérent ?

Vendredi

Rappel : la méthode d'Euler permet d'approcher la solution ϕ d'une équation différentielle au voisinage d'un point connu, en utilisant, de proche en proche, l'approximation affine de la fonction au voisinage de chaque point : en tout point a , $\phi(a + h) \simeq \phi(a) + h\phi'(a)$, lorsque h est petit (positif ou négatif).

Soit $I =]1; +\infty[$, et on considère l'équation différentielle (E) :

$$\forall t \in I \quad -t^2y'(t) + ty(t) = (y(t))^2$$

ayant pour inconnue une fonction $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I .

1. Montrer que la fonction $f: t \mapsto \frac{t}{\ln(t)}$ est une solution de l'équation (E) sur $]1; +\infty[$
2. Représenter en Python la fonction f sur l'intervalle $[2; 4]$.
3. On cherche une solution y de l'équation différentielle (E) vérifiant $y(e) = 3$. Sous réserve d'existence de y , utiliser la méthode d'Euler pour représenter en Python un tracé approximatif de la courbe représentative de y sur l'intervalle $[2; 4]$ en partant du point $(e; 3)$. On pourra tracer successivement une solution sur $[e; 4]$ puis une solution sur $[2; e]$. Comparer avec le graphe obtenu à la question 1.