

Partie 1 : Marche additive

Sous-Partie 1.1 : Déplacement libre

1. $X_3(\Omega) = \{-3h, -h, h, 3h\}$. On note D_k l'évènement «le k -ième déplacement est vers la droite».
 - $\mathbb{P}(X_3 = 3h) = \mathbb{P}(D_1 \cap D_2 \cap D_3)$, comme les D_k sont des évènements indépendants, $\mathbb{P}(X_3 = 3h) = \mathbb{P}(D_1)\mathbb{P}(D_2)\mathbb{P}(D_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.
 -

$$\mathbb{P}(X_3 = h) = \mathbb{P}((D_1 \cap D_2 \cap \overline{D_3}) \cup (D_1 \cap \overline{D_2} \cap D_3) \cup (\overline{D_1} \cap D_2 \cap D_3))$$

Or, les évènements $D_1 \cap D_2 \cap \overline{D_3}$, $D_1 \cap \overline{D_2} \cap D_3$ et $\overline{D_1} \cap D_2 \cap D_3$ sont deux à deux disjoints, donc

$$\mathbb{P}(X_3 = h) = \mathbb{P}(D_1 \cap D_2 \cap \overline{D_3}) + \mathbb{P}(D_1 \cap \overline{D_2} \cap D_3) + \mathbb{P}(\overline{D_1} \cap D_2 \cap D_3)$$

Puis par indépendance des évènements D_k ,

$$\mathbb{P}(X_3 = h) = \mathbb{P}(D_1)\mathbb{P}(D_2)\mathbb{P}(\overline{D_3}) + \mathbb{P}(D_1)\mathbb{P}(\overline{D_2})\mathbb{P}(D_3) + \mathbb{P}(\overline{D_1})\mathbb{P}(D_2)\mathbb{P}(D_3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

- De même, $\mathbb{P}(X_3 = -h) = \frac{3}{8}$
- De même, $\mathbb{P}(X_3 = -3h) = \frac{1}{8}$.

2. Proposons plusieurs rédactions :

- Notons S_i la variable aléatoire valant $+h$ si le i -ième déplacement se fait vers la droite et $-h$ si le i -ième déplacement se fait vers la gauche. Alors $\mathbb{E}(S_i) = h\mathbb{P}(S_i = h) + (-h)\mathbb{P}(S_i = -h) = h\frac{1}{2} - h\frac{1}{2} = 0$. De plus, $X_k = \sum_{i=1}^k S_i$. Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(X_k) = \sum_{i=1}^k \mathbb{E}(S_i) = \sum_{i=1}^k 0 = 0$.
- Notons Y la variable aléatoire valant $+h$ si le $k+1$ -ième déplacement est vers la droite et $-h$ s'il est vers la gauche, ainsi, $X_{k+1} = X_k + Y$. $\mathbb{E}(Y) = 0$ (comme à la méthode précédente), donc par linéarité de l'espérance $\mathbb{E}(X_{k+1}) = \mathbb{E}(X_k) + \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X_k)$, ainsi $(\mathbb{E}(X_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite constante. Comme $\mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(0) = 0$, X_k est d'espérance nulle.
- Comme le problème est symétrique gauche/droite. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour chaque chemin où X_k prend la valeur x , en remplaçant gauche et droite, il existe un chemin symétrique où X_k prend la valeur $-x$, et ces chemins auront la même probabilité (car la probabilité d'aller à droite est la même que celle d'aller à gauche), ainsi, $\mathbb{P}(X_k = x) = \mathbb{P}(X_k = -x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ainsi par somme $\mathbb{E}(X_k) = \sum_{x \in X_k(\Omega)} x\mathbb{P}(X_k = x) = 0$.

3. Y_k compte le nombre de sauts vers la droite, les sauts sont indépendants, chacun a une probabilité de $1/2$ et il y a k déplacements, ainsi, Y_k suit une loi binomiale de paramètres k et $1/2$.
4. Il y a Y_k déplacements vers la droite donc $k - Y_k$ vers la gauche. Ainsi,

$$X_k = +hY_k - h(k - Y_k) = 2hY_k - hk$$

5. (a) En utilisant la relation entre X_k et Y_k ainsi que l'univers image de Y_k , on obtient :

$$X_k(\Omega) = \{2hi - hk \mid i \in Y_k(\Omega)\} = \{h(2i - k) \mid i \in \llbracket 0; k \rrbracket\}$$

Soit $\ell \in X_k(\Omega)$, par ce qui précède, il existe $i \in \llbracket 0; k \rrbracket$ tel que $\ell = h(2i - k)$, alors

$$\mathbb{P}(X_k = \ell) = \mathbb{P}(X_k = h(2i - k)) = \mathbb{P}(2hY_k - hk = h(2i - k)) = \mathbb{P}(Y_k = i) = \binom{k}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{k-i} = \frac{1}{2^k} \binom{k}{i}$$

- (b) Comme Y_k suit une loi binomiale de paramètre k et $1/2$, $\mathbb{V}(Y_k) = k \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$, on a

$$\mathbb{V}(X_k) = \mathbb{V}(2hY_k - hk) = (2h)^2 \mathbb{V}(Y_k) = 4h^2 k \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = kh^2$$

Déplacement contraint

6. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. On cherche à calculer $\mathbb{P}(X_{k+1} = i)$. La famille $((X_k = j)_{1 \leq j \leq n})$ est un système complet d'événements. Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = i) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(X_{k+1} = i | X_k = j) \mathbb{P}(X_k = j)$$

À cause des cas particuliers au bord, on traite les cas $i = 1$ et $i = n$ à part.

- Si $i = 1$, alors pour tout $j \geq 3$, $\mathbb{P}(X_{k+1} = 1 | X_k = j) = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{k+1} = 1) &= \mathbb{P}(X_{k+1} = 1 | X_k = 1) \mathbb{P}(X_k = 1) + \mathbb{P}(X_{k+1} = 1 | X_k = 2) \mathbb{P}(X_k = 2) \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{P}(X_k = 1) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(X_k = 2) \end{aligned}$$

- Si $i \in \llbracket 2; n-1 \rrbracket$, alors pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{i+1, i-1\}$, $\mathbb{P}(X_{k+1} = i | X_k = j) = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{k+1} = i) &= \mathbb{P}(X_{k+1} = i | X_k = i-1) \mathbb{P}(X_k = i-1) + \mathbb{P}(X_{k+1} = i | X_k = i+1) \mathbb{P}(X_k = i+1) \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{P}(X_k = i-1) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(X_k = i+1) \end{aligned}$$

- Si $i = n$, on obtient de même que pour $i = 1$, $\mathbb{P}(X_{k+1} = n) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(X_k = n-1) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(X_k = n)$.

Posons $\vec{q} = M \vec{p}^{(k)}$. Alors, par produit matriciel et en utilisant les relations que l'on vient de trouver :

- $q_1 = \frac{1}{2} \mathbb{P}(X_k = 1) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(X_k = 2) = \mathbb{P}(X_{k+1} = 1)$.
- Soit $i \in \llbracket 2; n-1 \rrbracket$, $q_i = \frac{1}{2} \mathbb{P}(X_k = i-1) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(X_k = i+1) = \mathbb{P}(X_{k+1} = i)$.
- $q_n = \frac{1}{2} \mathbb{P}(X_k = n-1) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(X_k = n) = \mathbb{P}(X_{k+1} = n)$.

Ainsi, on a montré que $\vec{q} = \vec{p}^{(k+1)}$. Donc, $\vec{p}^{(k+1)} = M \vec{p}^{(k)}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(k) : \ll \vec{p}^{(k)} = M^k \vec{p}^{(0)} \gg$. Pour $k = 0$, $M^k \vec{p}^{(0)} = I_n \vec{p}^{(0)} = \vec{p}^{(0)}$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie. Alors,

$$\vec{p}^{(k+1)} = M \vec{p}^{(k)} = M M^k \vec{p}^{(0)} = M^{k+1} \vec{p}^{(0)}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. Par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\vec{p}^{(k)} = M^k \vec{p}^{(0)}$.

7. La matrice M est symétrique et à coefficients réels, d'après le théorème spectral, M est diagonalisable avec une base orthonormale de vecteurs propres. ainsi, il existe P une matrice inversible et D une matrice diagonale telles que $M = P D P^{-1}$ avec $P^{-1} = P^\top$.
8. En effectuant des opérations sur les lignes :

$$\begin{aligned} \text{rg}(M - I_3) &= \text{rg} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \text{rg} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \text{rg} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \end{aligned}$$

(en effet la dernière matrice est échelonnée est a deux pivots). D'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(M - I_3)) = 1$, ainsi, 1 est une valeur propre et $\dim(E_1(M)) = 1$. Notons $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Par un produit matriciel, on remarque que $MU = U$. Comme $U \neq 0_{3,1}$, U est un vecteur propre associé à la valeur propre 1 de M .

9. (a) v_1 est un vecteur propre pour la valeur propre 1, pour tout $i \in \llbracket 2; n \rrbracket$, v_i est un vecteur propre pour une autre valeur propre (car la dimension de l'espace propre associée à 1 est de dimension 1). Comme la matrice est symétrique à coefficients réels, les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux, ainsi v_1 et v_i sont orthogonaux, d'où $\vec{v}_1^\top \cdot \vec{v}_i = 0$.
- (b) En multipliant par $\vec{v}_i$ à droite par distributivité, et en utilisant le résultat de la question précédente, on obtient

$$N\vec{v}_i = M\vec{v}_i - \frac{\lambda_1}{\|\vec{v}_1\|^2} \vec{v}_1(\vec{v}_1^\top \vec{v}_i) = \lambda_i \vec{v}_i + 0$$

Comme $\vec{v}_i$ est un vecteur propre de M il n'est pas nul, c'est donc un vecteur propre de N pour la valeur propre λ_i .

- (c) Comme $N\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$, on en déduit que $\|\lambda_i \vec{v}_i\|_1 < \|\vec{v}_i\|_1$. Or, remarquons que, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, et $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|\lambda \vec{v}\|_1 = |\lambda| \|\vec{v}\|_1$ ¹. On a donc $|\lambda_i| \|\vec{v}_i\|_1 < \|\vec{v}_i\|_1$, comme v_i est un vecteur propre, v_i est non nul, donc au moins une de ses coordonnées est non nulle de sorte que $\|\vec{v}_i\|_1 > 0$ (par somme de termes positifs dont l'un est strictement positif), en divisant par $\|\vec{v}_i\|_1$, on obtient que $|\lambda_i| < 1$.
10. (a) Comme $1^k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1$ et que pour tout $i \in \llbracket 2; n \rrbracket$, $\lambda_i^k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ (car $|\lambda_i| < 1$), d'après la question

précédente, on peut en déduire $\lim_{k \rightarrow +\infty} D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$

- (b) Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(k)$: « $M^k = PD^kP^{-1}$ », pour $k = 0$, $PD^0P^{-1} = PI_nP^{-1} = I_n = M^0$ de sorte que $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie, alors $M^{k+1} = M^k M = PD^kP^{-1}PDP^{-1} = PD^{k+1}P^{-1}$, ainsi, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. Par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k = PD^kP^{-1}$.
- (c) On note L la limite de D^k quand $k \rightarrow +\infty$. Comme $M^k = PD^kP^{-1}$ et que $\lim_{k \rightarrow +\infty} D^k = L$, on en déduit, par un produit de limites², que $\lim_{k \rightarrow +\infty} M^k = PLP^{-1}$. Or, comme la première colonne de P est donnée par v_1 , on a

$$PL = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & * & \dots & * \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & * & \dots & * \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & * & \dots & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

De plus, $P^{-1} = P^\top$. Ainsi, la première ligne de P^{-1} est $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \dots \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$, donc

$$PLP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

11. Comme on a montré que $\vec{p}^{(k)} = M^k \vec{p}^{(0)}$, on en déduit que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \vec{p}^{(k)} = \frac{1}{n} J \vec{p}^{(0)}$ où on a noté J la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients valent 1. Or, d'après l'expression du produit

matriciel, le coefficient à la i -ième ligne de $J \vec{p}^{(0)}$ vaut $\sum_{j=1}^n 1 \cdot p_j^{(0)} = 1$ donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} \vec{p}^{(k)} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. En effet : $\|\lambda \vec{v}\| = \sum_{j=1}^n |\lambda v_j| = \sum_{j=1}^n |\lambda| \cdot |v_j| = |\lambda| \sum_{j=1}^n |v_j| = |\lambda| \cdot \|\vec{v}\|_1$

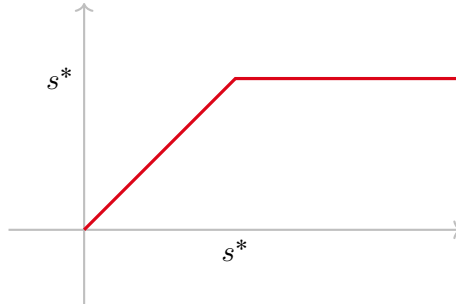
2. Un peu litigieux, car ce résultat n'est pas vraiment au programme de BCPST...

12. Ainsi, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\mathbb{P}(X_k = i) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{n}$. Ainsi, $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire X où $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$. Peu importe, comment on place la particule au départ, elle a une chance uniforme de se situer dans chaque case.

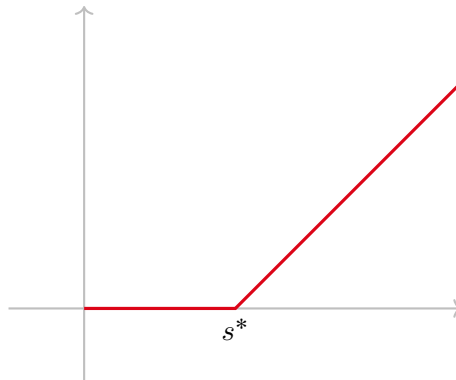
Partie 2 : Marche aléatoire multiplicative

Sous-partie 2.1 : Contrat à terme

13. Plus la durée du prix est longue, plus le prix peut évoluer à la hausse (événements climatiques, guerres etc.) ce qui augmente le risque pour la banque, elle a donc intérêt à augmenter c_T quand T augmente.
14. Tant que le prix est inférieur à s^* , l'entreprise paie le prix, au delà l'entreprise paie s^* et la banque compense :



15. Tant que le prix est inférieur à s^* , la banque ne verse rien, si le prix dépasse s^* , la banque verse $s_T - s^*$:



Sous-partie 2.2 : Le modèle binomial recombinant de Cox-Ross-Rubinstein

1. (a)
- (b) On note P_k l'évènement «on a eu un "up" au k -ième temps» pour tout $k \in \mathbb{N}$.
 - $\mathbb{P}(S_3 = u^3 s_0) = \mathbb{P}(P_1 \cap P_2 \cap P_3)$, par indépendance, $\mathbb{P}(S_3 = u^3 s_0) = \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(P_2)\mathbb{P}(P_3) = p^3$
 - $\mathbb{P}(S_3 = u) = \mathbb{P}((P_1 \cap P_2 \cap \overline{P_3}) \cup (\overline{P_1} \cap P_2 \cap P_3) \cup (P_1 \cap \overline{P_2} \cap P_3))$, comme les évènements $P_1 \cap P_2 \cap \overline{P_3}$, $\overline{P_1} \cap P_2 \cap P_3$ et $P_1 \cap \overline{P_2} \cap P_3$ sont deux à deux disjoints. $\mathbb{P}(S_3 = u) = \mathbb{P}(P_1 \cap P_2 \cap \overline{P_3}) + \mathbb{P}(\overline{P_1} \cap P_2 \cap P_3) + \mathbb{P}(P_1 \cap \overline{P_2} \cap P_3)$. Par indépendance, $\mathbb{P}(S_3 = u s_0) = 3p^2(1-p)$.
- (c) Soit s une valeur prise par S_n , alors, si on note k le nombre de «up», il y a eu $n-k$ «down», alors $s = s_0 u^k \left(\frac{1}{u}\right)^{n-k} = s_0 u^{2k-n}$. Ainsi, $s \in \{s_0 u^{2k-n} \mid k \in \llbracket 0; n \rrbracket\}$. Donc $\mathcal{D}_n \subset \{s_0 u^{2k-n} \mid k \in \llbracket 0; n \rrbracket\}$. Soit $s \in \{s_0 u^{2k-n} \mid k \in \llbracket 0; n \rrbracket\}$. Alors, il existe $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $s = s_0 u^{2k-n}$. Alors, par indépendance il est possible que les k premiers soit des «up» et les $n-k$ derniers sont des «down», ainsi S_n prend la valeur $s_0 \times u^k \times \left(\frac{1}{u}\right)^{n-k} = s$. Donc $\{s_0 u^{2k-n} \mid k \in \llbracket 0; n \rrbracket\} \subset \mathcal{D}_n$. Par double inclusion, $\mathcal{D}_n = \{s_0 u^{2k-n} \mid k \in \llbracket 0; n \rrbracket\}$.
2. (a) Soit $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, il y a deux cas :
 - Soit $s_0 u^{2k-n} \leq s^*$ et dans ce cas, G_n prend la valeur 0.

- Soit $s_0 u^{2k-n} > s^*$ et dans ce cas, G_n prend la valeur $s_0 u^{2k-n} - s^*$. Or,

$$\begin{aligned}
s_0 u^{2k-n} > s^* &\iff u^{2k-n} > \frac{s^*}{s_0} \iff (2k-n) \ln(u) > \ln\left(\frac{s^*}{s_0}\right) \iff k > \frac{n}{2} + \frac{\ln(s^*/s_0)}{2 \ln(u)} \\
&\iff k+1 > 1 + \frac{n}{2} + \frac{\ln(s^*/s_0)}{2 \ln(u)} \\
&\iff k+1 \geq \left\lceil 1 + \frac{n}{2} + \frac{\ln(s^*/s_0)}{2 \ln(u)} \right\rceil + 1 \\
&\iff k \geq a
\end{aligned}$$

En effet $\lfloor x \rfloor + 1$ est le plus petit nombre entier strictement plus grand que x .
Ainsi, G_n prend la valeur $s_0 u^{2k-n} - s^*$ ssi $k \in \llbracket a; n \rrbracket$ et sinon il prend la valeur 0. Donc $\mathcal{D}_{G_n} \subset \{0\} \cup \{u^{2k-n} s_0 - s^* \mid k \in \llbracket a; n \rrbracket\}$.

(b) a est le nombre minimal de «up» pour lequel la banque va devoir dépenser de l'argent.

(c) $n = 3$, $u = 2$, $s_0 = 1$, $s^* = 4$ et $p = 1/3$. ainsi, $S_3(\Omega) = \{8, 2, 1/2, 1/8\}$:

$$\begin{aligned}
&\bullet \mathbb{P}(S_3 = 8) = 1/27 \\
&\bullet \mathbb{P}(S_3 = 2) = 3 \cdot \frac{1}{9} \cdot (1 - 1/3) = 2/9 \\
&\bullet \mathbb{P}(S_3 = 1/2) = 3 \cdot (1/3) \cdot (2/3)^2 = 4/9 \\
&\bullet \mathbb{P}(S_3 = 1/8) = (1 - 1/3)^3 = 8/27. \\
&1 + \frac{n}{2} + \frac{\ln(s^*/s_0)}{2 \ln(u)} = 1 + \frac{3}{2} + \frac{\ln(4)}{2 \ln(2)} = \frac{7}{2}. \text{ Ainsi, } a = 3. \mathcal{D}_{G_n} = \{0, 2^3 - 4\} = \{0, 4\}. \mathbb{P}(G_3 = 4) = \\
&\mathbb{P}(S_3 = 8) = \frac{1}{27} \text{ et } \mathbb{P}(G_3 = 0) = 1 - \mathbb{P}(G_3 = 4) = \frac{26}{27}.
\end{aligned}$$

3. (a) La variable aléatoire G_n est la somme que la banque verse à l'entreprise, ainsi, $\mathbb{E}(G_n)$ est le coût moyen de la banque, le juste à l'équilibre devrait donc être égal à $\mathbb{E}(G_n)$.

(b) $c_3 = \mathbb{E}(G_3) = 0\mathbb{P}(G_3 = 0) + 4\mathbb{P}(G_3 = 4) = \frac{4}{27}$.

(c) Notons B_k la variable aléatoire valant 1 si il y a eu un «up» au k -ième temps et 0 sinon. Notons $U_n = \sum_{k=1}^n B_k$, U_n représente le nombre de «up», comme B_k suit une loi Bernoulli de paramètre p et que les B_k sont indépendants, U_n suit une loi Binomiale de paramètres n et p .
Soit $k \geq a$, remarquons que $(G_n = u^{2k-n} s_0 - s^*) = (U_n = k)$, ainsi :

$$\begin{aligned}
c_n = \mathbb{E}(G_n) &= \sum_{x \in \mathcal{D}_{G_n}} x \mathbb{P}(G_n = x) = 0\mathbb{P}(G_n = 0) + \sum_{k=a}^n (u^{2k-n} s_0 - s^*) \mathbb{P}(U_n = k) \\
&= \sum_{k=a}^n (u^{2k-n} s_0 - s^*) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}
\end{aligned}$$

4. (a) Les lignes 3 et 4 permettent de multiplier **Num**, valant initialement 1, par tous les entiers entre 2 et n , ainsi, **Num** vaut $n!$. Les lignes 6 et 7 permettent de multiplier **Den**, valant initialement 1, par tous les entiers entre 2 et k , ainsi, à l'issue de la ligne 7, **Den** vaut $k!$. En le multipliant par tous les entiers entre 2 et $n-k$, **Den** vaut $k!(n-k)!$ à la fin de la troisième boucle for. Or la fonction renvoie **Num** divisé par **Den** soit $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$ (seulement si $k \leq n$, dans le cas contraire, il faudrait renvoyer 0) La première boucle fait $n-1$ multiplications, la deuxième $k-1$ et la dernière $n-k-1$ et il y a une division, soit $2n-2$ opérations. Il risque d'avoir un quotient de grands nombres ce qui peut causer des problèmes de calculs.

(b) On remarque que $n!$ et $k!$ ont des termes en commun qui se simplifient dans la division, ainsi, $\frac{n!}{k!} = \prod_{i=k+1}^n i$, il suffit donc de calculer ce produit pour le numérateur et de calculer $(n-k)!$ pour le dénominateur et de renvoyer la fraction :

```

def Copt(n,k):
    Num = 1
    for i in range(k+1,n+1):

```

```

        Num *= i
    Den = 1
    for i in range(2,n-k+1):
        Dem *= i
    return Num/Den

```

5. La fonction `Feuilles` retourne $\mathcal{D}_{G_n}$ sous forme d'une liste en utilisant le résultat de la question 2a, on remarque que 0 apparaît plusieurs fois, alors qu'il n'y a pas de répétition dans un ensemble.
6. On appelle la fonction `Feuilles` pour avoir les valeurs de G_n et on multiplie chacune de ses valeurs par $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ (en utilisant la fonction `Copt`) et on somme :

```

def call(s0,setole,n,u,p):
    cn = 0
    F = Feuilles(n,u,s0,setole)
    for k in range(len(F)):
        cn += F[k]*Copt(n,k)*p**k*(1-p)**(n-k)
    return cn

```