

Partie 1 : Quelques résultats utiles

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après un résultat de cours, la série $\sum \frac{(\lambda x)^n}{n!}$ converge (c'est une série exponentielle) et sa somme vaut $e^{\lambda x}$. Par linéarité, la série $\sum \frac{\lambda^n x^n}{n!} e^{-\lambda}$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k \lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{x\lambda} = e^{\lambda(x-1)}$$

2. Posons $g: x \mapsto xe^{-x} - 1$, par produit de fonctions dérivables, g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x)$$

Ainsi, $g'(x) \geq 0$ si $x \in [0; 1]$ et $g'(x) \leq 0$ si $x \in [1; +\infty[$. Donc g est croissante sur $[0; 1]$ et décroissante sur $[1; +\infty[$. Si $x \in [0; 1]$, $x \leq 1$, par croissance de g sur $[0; 1]$, $g(x) \leq g(1) = e^{-1} - 1 < 0$ (par décroissance stricte d'exponentielle). Si $x \in [1; +\infty[$, $x \geq 1$, par décroissance de g sur $[1; +\infty[$, on a $g(x) \leq g(1) < 0$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) < 0$, g est donc strictement négative sur $\mathbb{R}_+$.

3. Par composition, f est deux fois dérivable sur $[0; 1]$, par différence de fonctions dérivables, ϕ aussi. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi'(x) = \lambda e^{\lambda(x-1)} - 1$ et $\phi''(x) = \lambda^2 e^{\lambda(x-1)} > 0$. Ainsi, ϕ' est strictement croissante sur $[0; 1]$, donc pour tout $x \in [0; 1]$, $\phi'(x) < \phi'(1) = \lambda - 1 \leq 0$ (car $\lambda \leq 1$). Ainsi, ϕ' est négative et ϕ' s'annule au plus en 1 (suivant si $\lambda = 1$ ou $\lambda < 1$). Ainsi, ϕ est strictement décroissante sur $[0; 1]$. Comme ϕ est de plus continue (car dérivable), d'après le théorème de la bijection, ϕ réalise une bijection de $[0; 1]$ vers

$$\phi([0; 1]) = [\phi(1); \phi(0)] = [0; e^{-\lambda}]$$

Ainsi, sur $[0; 1]$, ϕ ne s'annule que 1, or $\phi(x) = 0$ ssi $f(x) = x$. L'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $[0; 1]$ et cette solution est 1.

4. D'après la question précédente, pour tout $x \in [0; 1]$, $\phi''(x) = \lambda^2 e^{\lambda(x-1)} > 0$, donc ϕ' est strictement croissante sur $[0; 1]$. Comme ϕ' est continue sur $[0; 1]$, d'après le théorème de la bijection, ϕ' réalise une bijection de $[0; 1]$ vers

$$\phi'([0; 1]) = [\phi'(0); \phi'(1)] = [\lambda e^{-\lambda} - 1; \lambda - 1]$$

Remarquons, d'après la question 2 que $\lambda e^{-\lambda} - 1 = g(\lambda) < 0 < \lambda - 1$. Ainsi, 0 admet un unique antécédent par ϕ' sur $[0; 1]$. Notons α cet antécédent, remarquons que $0 < \alpha < 1$ (car 0 et 1 ne sont pas des antécédents de 0 par ϕ').

- Comme ϕ' est strictement croissante sur $[0; 1]$, pour tout $x > \alpha$, $\phi'(x) > \phi'(\alpha) = 0$. Ainsi, ϕ' est positive sur $[\alpha; 1]$ et ne s'annule que α donc ϕ est strictement croissante sur $[\alpha; 1]$ tout en étant continue sur $[0; \alpha]$. Ainsi, d'après le théorème de la bijection, ϕ réalise une bijection de $[\alpha; 1]$ vers $[\phi(\alpha); \phi(1)]$ avec $\phi(1) = 0$. Ainsi, ϕ s'annule une seule fois sur $[\alpha; 1]$ et c'est en 1. Remarquons que comme $\alpha < 1$, $\phi(\alpha) < \phi(1) = 0$.
- Comme ϕ' est strictement croissante sur $[0; 1]$, pour $x < \alpha$, $\phi'(x) < \phi'(\alpha) = 0$, ainsi, ϕ' est négative sur $[0; \alpha]$ et ne s'annule que α donc ϕ est strictement décroissante sur $[0; \alpha]$ tout en étant continue sur $[0; \alpha]$. Ainsi, d'après le théorème de la bijection, ϕ réalise une bijection de $[0; \alpha]$ vers

$$[\phi(\alpha); \phi(0)] = [\phi(\alpha); e^{-\lambda}]$$

Comme $\phi(\alpha) < 0 < e^{-\lambda}$, on peut en conclure que 0 admet un unique antécédent dans $[0; \alpha]$, notons x_λ cet antécédent. Remarquons que $x_\lambda < \alpha$, en effet, α n'est pas un antécédent de 0 par ϕ . Ainsi, sur $[0; 1]$, ϕ s'annule deux fois en x_λ et en 1 (car $x_\lambda < \alpha < 1$). L'équation $f(x) = x$ a donc exactement deux solutions sur $[0; 1]$: x_λ et 1.

5. D'après un résultat de cours T_1 admet une espérance et une variance et $\mathbb{E}(T_1) = \mathbb{V}(T_1) = t_1$

6. Comme $T_1(\Omega) = \mathbb{N}$ et $T_2(\Omega) = \mathbb{N}$, par somme d'entiers naturels, $(T_1 + T_2)(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on cherche à calculer $\mathbb{P}(T_1 + T_2 = n)$. Remarquons que $((T_1 = k))_{k \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, ainsi d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(T_1 + T_2 = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T_1 + T_2 = n \cap T_1 = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T_1 = k \cap T_2 = n - k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T_1 = k) \mathbb{P}(T_2 = n - k)$$

Où on a utilisé que T_1 et T_2 sont indépendantes (car $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes). Or, T_2 prend des valeurs dans $\mathbb{N}$, donc $\mathbb{P}(T_2 = n - k) = 0$ si $k > n$, donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_1 + T_2 = n) &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(T_1 = k) \mathbb{P}(T_2 = n - k) + 0 \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{t_1^k}{k!} e^{-t_1} \frac{t_2^{n-k}}{(n-k)!} e^{-t_2} \\ &= \frac{e^{-t_1-t_2}}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} t_1^k t_2^{n-k} = \frac{e^{-t_1-t_2}}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t_1^k t_2^{n-k} \\ &= \frac{e^{-t_1-t_2}}{n!} (t_1 + t_2)^n \end{aligned}$$

(où on a utilisé la formule du binôme de Newton à la dernière ligne). On peut en conclure que $T_1 + T_2$ suit une loi de Poisson de paramètre $t_1 + t_2$.

7. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$: « $\sum_{k=1}^n T_k$ suit une loi de Poisson de paramètre $\sum_{k=1}^n t_k$ ».
- Comme $\sum_{k=1}^1 T_k = T_1$ suit une loi de Poisson de paramètre $t_1 = \sum_{k=1}^1 t_k$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
 - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors, $\tilde{T}_1 = \sum_{k=1}^n T_k$ suit une loi de Poisson de paramètre $\sum_{k=1}^n t_k$ et $\tilde{T}_2 = T_{n+1}$ suit une loi de Poisson de paramètre t_{n+1} . Comme $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, $(T_1, T_2, \dots, T_{n+1})$ est une famille de variables aléatoires indépendantes, ainsi d'après le lemme des coalitions, $\sum_{k=1}^n T_k$ et T_{n+1} sont indépendantes, on peut donc appliquer le résultat de la question précédente à $\tilde{T}_1$ et $\tilde{T}_2$, $\tilde{T}_1 + \tilde{T}_2$ suit une loi de Poisson de paramètre $\sum_{k=1}^n t_k + t_{n+1}$. Ainsi, $\sum_{k=1}^{n+1} T_k$ suit une loi de Poisson de paramètre $\sum_{k=1}^{n+1} t_k$. Dès lors, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n T_k$ suit une loi de Poisson de paramètre $\sum_{k=1}^n t_k$.

8. Comme la fonction a est continue sur I , d'après le théorème fondamental de l'analyse, a admet au moins une primitive notée A . L'ensemble des solutions de (E_1) est

$$\left\{ t \mapsto C e^{A(t)} \mid C \in \mathbb{R} \right\}$$

9. Soit f une solution de (E_1) s'annulant sur I . Comme f est une solution de (E_1) , d'après la question précédente, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in I$, $f(t) = C e^{A(t)}$. Comme f s'annule sur I , il existe $t_0 \in I$ tel que $f(t_0) = 0$, on a alors $f(t_0) = C e^{A(t_0)} = 0$, comme $e^{A(t_0)} \neq 0$, on en déduit que $C = 0$. Ainsi, pour tout $t \in I$, $f(t) = C e^{A(t)} = 0$. Ainsi, f est bien la fonction nulle sur I .
10. Posons $y = g - C$, comme g est solution de (E_2) , g est en particulier dérivable sur I , par somme avec une constante, y est dérivable sur I et pour tout $t \in I$:

$$y'(t) = g'(t) = b(t)g(t)(g(t) - c) = b(t)g(t)y(t)$$

Ceci montre que $y = g - C$ est bien solution sur I de (E_3) .

11. Supposons qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $g(t_0) = C$, alors en posant $y = g - C$, on a que $y(t_0) = 0$. De plus, y est solution de (E_3) (d'après la question précédente). On pose $a = bg$ (fonction continue sur I par produit de fonctions continues), ainsi y est solution de (E_1) et s'annule. En appliquant le résultat de la question 9, on en déduit que y est la fonction nulle sur I , ainsi g est la fonction constante égale à C sur I .

Partie II : Probabilité d'extinction d'une stratégie

12. • $p_0 = \mathbb{P}((Z_0 = 0)) = \mathbb{P}((1 = 0)) = 0$
 • Remarquons que comme $Z_0 = 1$, $Z_1 = \sum_{k=1}^1 X_{1,k} = X_{1,1}$, ainsi,

$$p_1 = \mathbb{P}((Z_1 = 0)) = \mathbb{P}(X_{1,1} = 0) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda}$$

- Les événements $(Z_1 = p)$, pour $p \in \mathbb{N}$, forment un système complet d'événements, ainsi d'après la formule des probabilités totales :

$$p_2 = \mathbb{P}(Z_2 = 0) = \sum_{p=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_2 = 0 | Z_1 = p) \mathbb{P}(Z_1 = p) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^p X_{1,k} = 0 | Z_1 = p\right) \mathbb{P}(Z_1 = p)$$

Comme les $X_{1,k}$ et Z_1 sont indépendantes, d'après le lemme des coalitions, $\sum_{k=1}^p X_{1,k}$ et Z_1 sont indépendantes, de sorte que

$$p_2 = \sum_{p=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^p X_{1,k} = 0\right) \mathbb{P}(Z_1 = p)$$

Or, les $X_{1,k}$ sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ donc leur somme est nulle si et seulement si elles prennent toutes la somme nulle, le cas où $p = 0$ est à part, car la somme vide vaut, par convention, 0, donc

$$p_2 = \mathbb{P}(0 = 0) \mathbb{P}(Z_1 = 0) + \sum_{p=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^p (X_{1,k} = 0)\right) \mathbb{P}(Z_1 = p)$$

Or, comme les variables aléatoires $X_{1,k}$ sont indépendantes :

$$\begin{aligned} p_2 &= e^{-\lambda} + \sum_{p=1}^{+\infty} \prod_{k=1}^p \mathbb{P}(X_{1,k} = 0) \frac{\lambda^p}{p!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} + \sum_{p=1}^{+\infty} (e^{-\lambda})^p \frac{\lambda^p}{p!} e^{-\lambda} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\lambda^p}{p!} (e^{-\lambda})^p e^{-\lambda} = S(e^{-\lambda}) = e^{\lambda(e^{-\lambda}-1)} \end{aligned}$$

(où on a utilisé le résultat de la question 1 à $x = e^{-\lambda}$).

13. Remarquons que si $(Z_n = 0)$ est réalisé, alors $Z_{n+1} = \sum_{k=1}^0 X_{n,k} = 0$ par convention. Donc $A_n \subset A_{n+1}$, par croissance de la probabilité, $\mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(A_{n+1})$. Ainsi, $(\mathbb{P}(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante, elle est majorée par 1 car ses termes sont des probabilités. Comme elle est croissante et majorée, d'après le théorème de la limite monotone, elle converge.
14. Les événements $(Z_1 = k)$, pour $k \in \mathbb{N}$, forment un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$p_{n+1} = \mathbb{P}(Z_{n+1} = 0) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(Z_{n+1} = 0 | Z_1 = k) \mathbb{P}(Z_1 = k) = \sum_{k=0}^n p_n^k \mathbb{P}(X_{1,1} = k) = \sum_{k=0}^n p_n^k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = S(p_n)$$

15. Notons $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$, comme $0 \leq p_n \leq 1$ et que les inégalités larges sont conservées par passage à la limite $0 \leq \ell \leq 1$. Comme $p_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$ et que S est continue en ℓ (car $x \mapsto e^{\lambda(x-1)}$ est continue sur $\mathbb{R}$), on en déduit que $S(p_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S(\ell)$, or, par extraction $p_{n+1} = S(p_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$. Donc par unicité de la limite $S(\ell) = \ell$, rappelons aussi que $S = f$ (avec les notations de la partie I)
- Si $\lambda \leq 1$, le résultat de la question 3, montre que $f(x) = x$ a pour seule solution 1 sur $[0; 1]$ donc nécessairement, $\ell = 1$.

- Si $\lambda > 1$. Le résultat de la question 4, montrer que $\ell = 1$ ou $\ell = x_\lambda$. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $p_n \leq x_\lambda$ », comme $p_0 = 0$ et que $x_\lambda \in]0; 1[$ (voir question 4), $\mathcal{P}(0)$ est vraie, soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Remarquons que $f: x \mapsto e^{\lambda(x-1)}$ est croissante sur $\mathbb{R}$, donc $f(p_n) \leq f(x_\lambda)$, c'est-à-dire $p_{n+1} \leq x_\lambda$, ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n \leq x_\lambda$, comme les inégalités larges sont conservées par passage à la limite $\ell \leq x_\lambda < 1$, donc $\ell \neq 1$, ainsi $\ell = x_\lambda$.
16. Si $\lambda \leq 1$, alors en moyenne chaque individu a un enfant ou moins, et donc l'extinction est un événement presque sûr. Si $\lambda > 1$, alors en moyenne chaque individu a strictement plus d'un enfant et l'extinction a une probabilité non nulle et non égale à 1 d'arriver.