

1 Corrigé du problème 2 G2E 2024

1. Posons $f: x \mapsto \exp(-x^2)$, la fonction f est continue sur $]-\infty; +\infty[$ (par composée de fonctions qui le sont). Soit $x \geq 1$, en multipliant par $x \geq 0$, on a $x^2 \geq x$ puis $-x^2 \leq -x$, comme exponentielle est croissante, on en déduit que $0 \leq \exp(-x^2) \leq \exp(-x)$. Posons $g: x \mapsto \exp(-x)$, g est continue sur $[1; +\infty[$, soit $t \geq 1$, alors

$$\int_1^t g(x) dx = [-\exp(-x)]_1^t = \exp(-1) - \exp(-t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \exp(-1)$$

Ainsi, $\int_1^{+\infty} g$ converge, par comparaison de fonctions positives, on en déduit que $\int_1^{+\infty} f$ converge, de plus, $\int_0^1 f$ converge (fonction continue sur un segment), donc $\int_0^{+\infty} f$ converge. Comme f est paire, on en déduit que $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) dx$ converge.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, posons $h: t \mapsto \cos^{n+1}(t)$, alors $h(0) = 1 > 0$, ainsi h est continue et positive sur $[0; \pi/2]$ et non nulle. D'après le théorème de stricte positivité de l'intégrale, $\int_0^{\pi/2} h(t) dt > 0$. Posons $k: t \mapsto \cos^n(t) - \cos^{n+1}(t)$. Remarquons que pour $t \in [0; \pi/2]$, $k(t) = \cos^n(t)(1 - \cos(t)) \geq 0$, k est continue et comme $k(\pi/4) > 0$, k est non nul, ainsi, d'après le théorème de stricte positivité de l'intégrale, $\int_0^{\pi/2} k(t) dt > 0$. Par linéarité de l'intégrale, on en déduit que $W_n - W_{n+1} > 0$. Ainsi, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < W_{n+1} < W_n$.
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}(t) \times \cos(t) dt$. On pose $u: t \mapsto \cos^{n+1}(t)$ et $v: t \mapsto \sin(t)$, u et v sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \pi/2]$ et :

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= [\cos^{n+1}(t) \sin(t)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (n+1) - \sin(t) \cos^n(t) \sin(t) dt \\ &= \cos^{n+1}(\pi/2) \sin(\pi/2) - \cos^{n+1}(0) \sin(0) + \int_0^{\pi/2} (n+1) \cos^n(t) (1 - \cos^2(t)) dt \\ &= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2} \end{aligned}$$

Ainsi, $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$, donc $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$.

- (c) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n): \ll nW_nW_{n-1} = \pi/2 \gg$.
- $W_0 = \int_0^{\pi/2} \cos^0(t) dt = \int_0^{\pi/2} 1 dt = \pi/2$ et $W_1 = \int_0^{\pi/2} \cos^1(t) dt = [\sin(t)]_0^{\pi/2} = 1$. De sorte, que pour $n = 1$, $nW_nW_{n-1} = 1 \cdot W_1 \cdot W_0 = \pi/2$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, alors en appliquant le résultat de la question précédente à $n-1 \in \mathbb{N}$, on a :

$$(n+1)W_{n+1}W_n = (n+1) \left(\frac{n}{n+1}W_{n-1} \right) W_n = nW_{n-1}W_n \stackrel{\mathcal{P}(n)}{=} \frac{\pi}{2}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $nW_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.

- (d) Soit un entier $n \geq 2$. En appliquant le résultat de la question 2a à $n-1$ et à $n-2$,

$$0 < W_n < W_{n-1} < W_{n-2}$$

En divisant par $W_n > 0$, on obtient $1 < \frac{W_{n-1}}{W_n} < \frac{W_{n-2}}{W_n}$. En appliquant le résultat de la question 2b à $n-2$, on $W_n = \frac{n-1}{n}W_{n-2}$, donc $\frac{W_{n-2}}{W_n} = \frac{n}{n-1}$, donc $1 < \frac{W_{n-1}}{W_n} < \frac{n}{n-1}$, comme

$\frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$, on en déduit, d'après le théorème des gendarmes, $\frac{W_{n-1}}{W_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. Ceci montre que $W_{n-1} \sim W_n$. Par produit d'équivalents, on en déduit que $\pi/2 = nW_n W_{n-1} \sim nW_n^2$. Comme les équivalents sont conservés par quotient, $W_n^2 = \frac{\pi}{2n}$, de même les équivalents sont conservés par passage à la puissance (et $W_n > 0$ et $\frac{\pi}{2n} > 0$) donc $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

3. (a) Posons, pour $x > -1$, $f(x) = x - \ln(1+x)$. Par composée et par somme, f est dérivable sur $] -1; +\infty[$, et pour $x > -1$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$. Ainsi, pour $x \geq 0$, $f'(x) \geq 0$, donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, si $x \geq 0$, $f(x) \geq f(0) = 0$. Pour $x \leq 0$, $f'(x) \leq 0$, donc f est décroissante sur $] -1; 0]$. Ainsi, si $x \in] -1; 0]$ alors $x \leq 0$ et donc $f(x) \geq f(0) = 0$. On a ainsi montré que pour tout $x > -1$, $f(x) \geq 0$, donc $\ln(1+x) \leq x$.
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in [0; \sqrt{n}[$, alors $\frac{x^2}{n} < 1$ de sorte que $1 - \frac{x^2}{n} > 0$, ainsi en appliquant le résultat de la question précédente à $-\frac{x^2}{n} > -1$ et par croissance de l'exponentielle :

$$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)\right) \leq \exp\left(n \cdot \left(-\frac{x^2}{n}\right)\right) = \exp(-x^2)$$

On remarque que cette inégalité est encore vraie si $x = \sqrt{n}$ (le membre de gauche est nulle et celui de droite strictement positif), ainsi par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx$$

Soit $x \in [0; \sqrt{n}]$, alors $\frac{x^2}{n} > -1$ et $1 + \frac{x^2}{n} > 0$, en appliquant le résultat de la question précédente à $\frac{x^2}{n} > -1$:

$$\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} = \exp\left((-n) \ln\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)\right) \geq \exp\left(-n \left(\frac{x^2}{n}\right)\right) = \exp(-x^2)$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $\int_0^{\sqrt{n}} \exp(-x^2) dx \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx$

- (c) On pose $x = \sqrt{n} \sin(t)$, $t \mapsto \sqrt{n} \sin(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone sur $[0; \pi/2]$, $dx = \sqrt{n} \cos(t) dt$, lorsque $t = 0$, x vaut 0 et quand $t = \frac{\pi}{2}$, $x = \sqrt{n}$, de plus, $\frac{x^2}{n} = \sin^2(t)$, ainsi :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(t))^n \sqrt{n} \cos(t) dt = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(t) dt = \sqrt{n} W_{2n+1}$$

On pose $x = \sqrt{n} \tan(t)$, $t \mapsto \sqrt{n} \tan(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone sur $[0; \pi/4]$, $dx = \sqrt{n}(1 + \tan^2(t)) dt = \sqrt{n} \sec^2(t) dt$ (car $\tan'(t) = 1 + \tan^2(t) = \frac{1}{\cos^2(t)}$). Lorsque $t = 0$,

x vaut 0 et quand $t = \frac{\pi}{4}$, $x = \sqrt{n}$, de plus, $\frac{x^2}{n} = \tan^2(t)$, de sorte que $(1 + x^2/n)^{-n} = (1 + \tan^2(t))^{-n} = \left(\frac{1}{\cos^2(t)}\right)^{-n} = \cos^{2n}(t)$, ainsi :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n}(t) \times \frac{1}{\cos^2(t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2}(t) dt$$

Remarquons que $t \mapsto \cos^{2n-2}(t)$ est positive sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$, de sorte que $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(t) dt \geq 0$, donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2}(t) dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2}(t) dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(t) dt$$

(où on a utilisé la relation de Chasles pour la dernière égalité). Ainsi, on a bien démontré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} \exp(-x^2) dx = \sqrt{n}W_{2n-2}$$

- (d) On a montré que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, donc par définition $\sqrt{\frac{2n}{\pi}}W_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. Par extraction,

$$\sqrt{\frac{2(2n+1)}{\pi}}W_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Ainsi, $W_{2n+1} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n+2}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$, donc $\sqrt{n}W_{2n+1} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ donc $\sqrt{n}W_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. On

démontre de la même façon que $\sqrt{n}W_{2n-2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. D'après le théorème des gendarmes

$$\int_0^{\sqrt{n}} \exp(-x^2) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \text{ Or, comme } \int_0^{+\infty} \exp(-x^2) dx \text{ converge,}$$

$$\int_0^{\sqrt{n}} \exp(-x^2) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \exp(-x^2) dx$$

Par unicité de la limite $\int_0^{+\infty} \exp(-x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Par parité de $x \mapsto \exp(-x^2)$, $I = \sqrt{\pi}$.

4. (a) $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$. Comme $x \mapsto -\frac{x^2}{2}$ est dérivable de dérivée, $x \mapsto -x$, par composée de fonctions dérivables, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'(x) = -x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2}) = x\varphi(x)$.

- (b) Par définition d'une variable aléatoire à densité, $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$

5. (a) Notons F_Y la fonction de répartition de Y , soit $x \in \mathbb{R}$,

$$F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(\max(X_1, X_2) \leq x) = \mathbb{P}((X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x))$$

par indépendance de X_1 et X_2 , $F_Y(x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x)\mathbb{P}(X_2 \leq x) = \Phi(x)^2$. Donc $F_Y = \Phi^2$. Notons F_Z la fonction de répartition de Z , soit $x \in \mathbb{R}$, $F_Z(x) = \mathbb{P}(Z \leq x) = 1 - \mathbb{P}(Z > x) = 1 - \mathbb{P}(\min(X_1, X_2) > x) = 1 - \mathbb{P}((X_1 > x) \cap (X_2 > x))$, par indépendance de X_1 et X_2 ,

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= 1 - \mathbb{P}(X_1 > x)\mathbb{P}(X_2 > x) = 1 - (1 - \mathbb{P}(X_1 \leq x))(1 - \mathbb{P}(X_2 \leq x)) \\ &= 1 - (1 - \Phi(x))(1 - \Phi(x)) = 2\Phi(x) - \Phi^2(x) \end{aligned}$$

Ainsi, $F_Z = 2\Phi - \Phi^2$

- (b) Comme φ est continue sur $\mathbb{R}$ (par composée de fonctions qui le sont), d'après le théorème fondamental de l'analyse, $\Phi: x \mapsto \int_{-\infty}^0 \varphi + \int_0^x \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\Phi': x \mapsto 0 + \varphi(x)$.

Ainsi, par produit F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points (0 en l'occurrence), ainsi, Y est à densité et $t \mapsto F_Y'(t) = 2\Phi'(t)\Phi(t) = 2\varphi(t)\Phi(t)$ est une densité de Y . De même, F_Z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points (0 aussi) et continue sur $\mathbb{R}$, ainsi Z est à densité, et $t \mapsto F_Z'(t) = 2\varphi(t) - 2\varphi(t)\Phi(t)$ est une densité de Z .

6. (a) Par définition, Y admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} x2\varphi(x)\Phi(x) dx$ converge absolument si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} x2\varphi(x)\Phi(x) dx$ converge absolument (par linéarité). Si $\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\Phi(x) dx$ converge absolument, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\Phi(x) dx$ converge. Réciproquement si $\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\Phi(x) dx$ converge, alors $\int_0^{+\infty} x\varphi(x)\Phi(x) dx$ et $\int_{-\infty}^0 x\varphi(x)\Phi(x) dx$ converge. Par linéarité, $\int_0^{+\infty} x\varphi(x)\Phi(x) dx =$

$\int_0^{+\infty} |x|\varphi(x)\Phi(x)dx$ et $\int_{-\infty}^0 -x\varphi(x)\Phi(x)dx = \int_{-\infty}^0 |x|\varphi(x)\Phi(x)dx$ converge donc $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\varphi(x)\Phi(x)dx$ converge ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\Phi(x) dx$ absolument. Ainsi, Y admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\Phi(x) dx$ converge, si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} -\varphi'(x)\Phi(x) dx$ converge (d'après la question 4a) si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\Phi(x) dx$ converge.

- (b) Les fonctions φ et Φ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Remarquons que $\Phi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ (propriété d'une fonction de répartition) et $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, par produit, $\Phi(x)\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, $\Phi(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ (propriétés d'une fonction de répartition) et $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$, par produit, $\Phi(x)\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$. Ainsi, par intégrations par parties, comme $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'\Phi$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\Phi'$ ont même nature. De plus, $\varphi\Phi': x \mapsto \varphi(x)^2 = \frac{1}{2\pi} \exp(-x^2)$, or cette intégrale converge d'après la question 1, ainsi, par intégration par parties, $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'\Phi$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\Phi(x) dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)\Phi'(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)\Phi(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\Phi' = 0 - 0 - \frac{1}{2\pi}\sqrt{\pi} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

- (c) D'après les questions précédentes, Y admet donc une espérance et

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x2\varphi(x)\Phi(x) dx = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\Phi(x) dx = -2 \times \left(\frac{-1}{2\sqrt{\pi}} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

- (d) Considérons $\omega \in \Omega$, il y a deux cas :

- Si $X_1(\omega) < X_2(\omega)$, alors $Y(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega)) = X_2(\omega)$ de même, $Z(\omega) = X_1(\omega)$, de sorte que $(Y + Z)(\omega) = Y(\omega) + Z(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) = (X_1 + X_2)(\omega)$.
- Si $X_2(\omega) \leq X_1(\omega)$, alors $Y(\omega) = X_2(\omega)$ et $Z(\omega) = X_1(\omega)$ de sorte que $(Y + Z)(\omega) = (X_1 + X_2)(\omega)$.

Ainsi, $Y + Z = X_1 + X_2$, ainsi, $Z = X_1 + X_2 - Y$, comme X_1 , X_2 et Y admettent des espérances (les deux premières car ce sont des variables suivant une loi normale centrée réduite, la troisième par la question précédente), par linéarité Z admet une variable aléatoire et $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) - \mathbb{E}(Y) = 1 + 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{2\sqrt{\pi} - 1}{\sqrt{\pi}}$.

7. (a)

(b)

8. (a)

(b)

- (c) Remarquons que $Z \leq Y$, ainsi $\mathbb{P}((Z \geq 3) \cap (Y \leq 2)) = 0$ (évènement impossible), or $\mathbb{P}(Y \leq 2) = \int_0^2 2\varphi(t)\Phi(t) dt$. Comme $t \mapsto 2\varphi(t)\Phi(t)$ est continue, positive et non nul (par exemple en 1), ainsi d'après le théorème de stricte positivité de l'intégrale $\mathbb{P}(Y \leq 2) > 0$. De même $\mathbb{P}(Z \geq 3) = \int_3^{+\infty} 2\varphi - 2\varphi\Phi$. Remarquons que $2\varphi(1 - \Phi)$ est continue, positive et non nul (par exemple en 18), ainsi, d'après le théorème de stricte positivité de l'intégrale $\mathbb{P}(Z \geq 3) > 0$. Ainsi, $\mathbb{P}(Y \leq 2)\mathbb{P}(Z \geq 3) > 0 = \mathbb{P}((Z \geq 3) \cap (Y \leq 2))$. Par conséquent, Y et Z ne sont pas indépendantes.