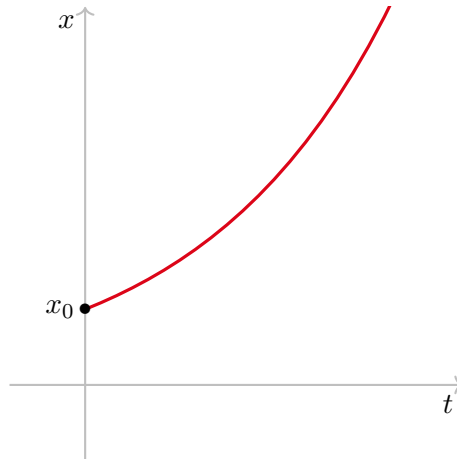


Corrigé Modélisation 2022

1 Modélisation de la dynamique d'une population isolée

1. (a) Comme (1) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène à coefficients constants, l'ensemble des solutions de (1) est $\{t \mapsto Ce^{rt} \mid C \in \mathbb{R}\}$. De plus, si $x: t \mapsto Ce^{rt}$, alors $x(0) = C$. Ainsi, la seule constante C tel que $x(0) = x_0$ est $C = x_0$. Donc $x: t \mapsto x_0e^{rt}$ est l'unique solution de (1) avec la condition initiale $x(0) = x_0$.

(b)



- (c) Comme $r > 0$, $x(t) = x_0e^{rt} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$, l'effectif des lièvres tend vers l'infini quand le temps augmente. ainsi ce n'est pas une modélisation raisonnable.

2. (a) Si $x(t)$ reste petit, alors on peut négliger $\frac{x(t)}{K}$ devant le 1, de sorte l'équation (2) est proche de celle de (1), et donc les solutions de (2) peuvent être supposées proches de des solutions de (1) (au moins tant que $x(t)$ est petit).

(b)

x	0	K	$+\infty$	
rx		+	+	
$1 - \frac{x}{K}$		+	0	-
$\frac{dx}{dt}$		+	0	-

- (c) Présentons trois rédactions, la première est hors programme de BCPST (mais serait peut-être acceptée vu la difficulté de la question), la deuxième est courte mais peu précise (mais serait aussi largement acceptée), la troisième est la version complète de la seconde.

- i. Supposons qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $x(t_0) = 0$, alors x et la fonction nulle sont toutes les deux solutions de (2) avec la même condition initiale en t_0 . Par unicité de la solution du problème de Cauchy, on en déduit que x est la fonction nulle sont égales. Ce qui contredit $x(0) = x_0 > 0$, donc x ne s'annule pas.
- ii. Supposons que x s'annule et considérons t_0 le plus petit temps où x s'annule, alors avant par continuité, avant t_0 , x est strictement positive et juste avant t_0 , x prend des valeurs inférieures ou égales à K donc d'après le tableau de signe $\frac{dx}{dt}$ est strictement positive juste avant t_0 , donc x est strictement croissante, comme $x(t_0) = 0$, on en déduit que avant x était négatif, ce qui est impossible par continuité. Ainsi, il n'existe pas de $t > 0$ tel que $x(t) = 0$.
- iii. Supposons qu'il existe $t > 0$ tel que $x(t) = 0$, considérons $T = \{t > 0 \mid x(t) = 0\}$, alors T est un ensemble non vide et minorée (par 0), donc admet une borne inférieure, notée b .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $b + \frac{1}{n}$ n'est pas un minorant de T , donc il existe $t_n \in T$ tel que $b \leq t_n \leq b + \frac{1}{n}$, d'après le théorème d'encadrement, $t_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} b$. Comme x est continue en b , $0 = x(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x(b)$, par unicité de la limite, $x(b) = 0$. Ainsi, pour tout $x \in [0; b[$, $x(t) > 0$ (en effet sur $[0; b[$, x ne s'annule pas, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, ne peut pas changer de signe et $x(0) > 0$) et $x(b) = 0$. Par continuité de x en b , $\lim_{t \rightarrow b} x(t) = x(b) = 0$.

Prenons $\varepsilon = \frac{K}{2} > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in]b - \delta; b] \cap \mathbb{R}_+$,

$$x(b) - \varepsilon \leq x(t) \leq x(b) + \varepsilon = \frac{K}{2} < K$$

Ainsi, d'après le tableau de signe de la question précédente, $x'(t) > 0$ pour $t \in [b - \delta; b[\cap \mathbb{R}_+^*$. Ainsi, x est croissante sur $[b - \delta; b] \cap \mathbb{R}_+$. Donc, pour $t \in [b - \delta; b[$,

$$x(b) = 0 < x(t) \leq x(b)$$

Ce qui est absurde. Ainsi, il n'existe pas de $t > 0$ tel que $x(t) = 0$.

(d) Comme x est dérivable et ne s'annule pas, par quotient z est dérivable et

$$\forall t \geq 0 \quad z'(t) = \frac{-x'(t)}{x(t)^2} = \frac{-rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)}{x(t)^2} = \frac{r}{K} - rz(t)$$

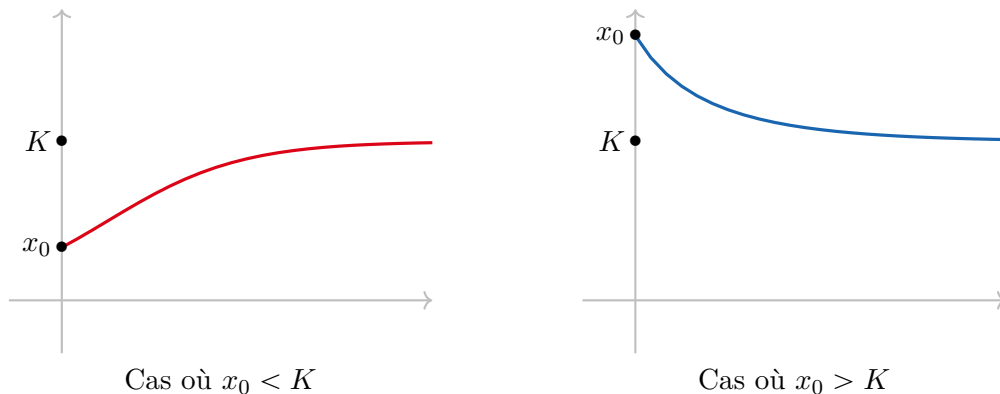
(e) Les solutions de l'équation homogène $\frac{dz}{dt} = -rz$ sont les fonctions $t \mapsto Ce^{-rt}$ avec $C \in \mathbb{R}$. De plus, $t \mapsto \frac{1}{K}$ est une solution particulière de l'équation $\frac{dz}{dt} = \frac{r}{K} - rz$. Ainsi, les solutions de l'équation sont les fonctions $t \mapsto \frac{1}{K} + Ce^{-rt}$ avec $C \in \mathbb{R}$. Comme $z(0) = z_0$, on a $\frac{1}{K} + C = z_0$, donc $C = z_0 - \frac{1}{K}$, ainsi, $z: t \mapsto \left(z_0 - \frac{1}{K}\right) e^{-rt} + \frac{1}{K}$.

(f) Comme x est solution de (2) ssi $z = \frac{1}{x}$ est solution $\frac{dz}{dt} = \frac{r}{K} - rz$, et que $x_0 = \frac{1}{z_0}$, on en déduit que

$$x: t \mapsto \frac{1}{\left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{K}\right) e^{-rt} + \frac{1}{K}} = \frac{Kx_0}{(K - x_0)e^{-rt} + x_0}$$

(g) Comme $r > 0$, $e^{-rt} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, on en déduit que $x(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} K$.

(h)



(i) Le modèle (2) permet d'obtenir d'avoir des populations dont l'effectif est bornée et ne peut donc plus tendre vers $+\infty$ contrairement à (1), le modèle (2) est donc plus réaliste. Si x dépasse K , alors x est décroissante et tend vers K , si x est en dessous de K , x est croissante et tend aussi vers K . La constante K est donc la «charge maximale du milieu» ou «capacité biotique» et permet à la population de s'auto-réguler pour tendre vers cette équilibre.

2 Modèle proie-prédateur

3. (a) Si y est la fonction nulle, alors l'équation modélisant l'effectif des lièvres devient $\frac{dx}{dt} = rx$ et on revient à l'équation (1) et la population des lièvres tend vers $+\infty$.
- (b) Si $x(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$, alors $\frac{dy}{dt} = -my$ et la résolution est similaire à celle de (1), $y: t \mapsto y_0 e^{-mt}$, comme $m > 0$, $y(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$. Sans nourriture, les lynx disparaissent.
4. Par composée $\bar{x}: s \mapsto \frac{q}{r}x\left(\frac{s}{r}\right)$ et $\bar{y}: s \mapsto \frac{p}{r}y\left(\frac{s}{r}\right)$ sont dérivables et pour tout $s \geq 0$,

$$\bar{x}'(s) = \frac{q}{r^2}x'\left(\frac{s}{r}\right) \quad \text{et} \quad \bar{y}'(s) = \frac{p}{r^2}y'\left(\frac{s}{r}\right)$$

Or,

$$(3) \iff \forall s \geq 0 \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt}\left(\frac{s}{r}\right) = rx\left(\frac{s}{r}\right) - px\left(\frac{s}{r}\right)y\left(\frac{s}{r}\right) \\ \frac{dy}{dt}\left(\frac{s}{r}\right) = -my\left(\frac{s}{r}\right) + qx\left(\frac{s}{r}\right)y\left(\frac{s}{r}\right) \end{cases}$$

$$\iff \forall s \geq 0 \quad \begin{cases} \frac{d\bar{x}}{ds}(s) = \bar{x}(s) - \bar{x}(s)\bar{y}(s) \\ \frac{d\bar{y}}{ds}(s) = -\frac{m}{r}\bar{y}(s) + \bar{x}(s)\bar{y}(s) \end{cases} \quad (\text{en multipliant par } \frac{q}{r^2} \text{ et } \frac{p}{r^2})$$

On obtient donc la forme demandée avec $a = \frac{m}{r}$.

5. (a) (x, y) est un point d'équilibre ssi $\begin{cases} x(1-y) = 0 \\ y(x-a) = 0 \end{cases}$ Si $x = 0$, comme $a \neq 0$, $y(x-a) = 0$ ssi $y = 0$, donc (x, y) est un point d'équilibre ssi $x = y = 0$ ou $(y = 1 \text{ et } x = a)$
- (b) $(x, y) = (0, 0)$ est un point d'équilibre correspondant au cas où les deux espèces ne sont pas présentes. La deuxième, veut dire que $x: t \mapsto \frac{m}{q}$ et $y: t \mapsto rp$
- (c) Le deuxième point d'équilibre s'explique par le fait que l'effectif des proies est constant car les naissances sont parfaitement compensées par les morts et par les proies mangés, de même pour les prédateurs : ils mangent suffisamment pour se reproduire assez pour compenser leur décès.
6. (a) Par différence de fonctions dérivables, f_c est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et $f'_c: u \mapsto 1 - \frac{c}{u}$. Ainsi, pour $u \in]0; c[$, $f'_c(u) < 0$, $f'_c(c) = 0$ et pour tout $u > c$, $f'_c(u) > 0$. Ainsi, f est strictement décroissante sur $]0; c[$ (sa dérivée est négative et ne s'y annule qu'une seule fois), donc

$$\forall u \in]0; c[\quad f_c(u) > f_c(c) = c - c \ln(c)$$

De même, f est strictement croissante sur $]c; +\infty[$ (sa dérivée est positive et ne s'y annule qu'une seule fois).

$$\forall u \in]c; +\infty[\quad f_c(u) > f_c(c) = c - c \ln(c)$$

Ainsi, pour tout $c \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{c\}$, $f_c(u) > c(1 - \ln(c))$ et il y a égalité pour $u = c$. On a donc montré que pour tout $u > 0$, $f_c(u) \geq c(1 - \ln(c))$.

- (b) Comme l'inégalité est stricte sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{c\}$, $f_c(u) = c(1 - \ln(c))$ ssi $u = c$.
- (c) • Comme f_c est strictement croissante sur $]c; +\infty[$ et continue, d'après le théorème de la bijection, f_c réalise une bijection de $]c; +\infty[$ vers

$$\left[f_c(c); \lim_{u \rightarrow +\infty} f_c(u) \right[= [c(1 - \ln(c)); +\infty[$$

(en effet, par croissance comparée, $f_c(u) \sim u \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} +\infty$), Ainsi, comme $M \in [c(1 - \ln(c)); +\infty[$, M admet un unique antécédent dans $]c; +\infty[$ que l'on note B . Comme f_c est strictement croissante sur $]c; +\infty[$, pour tout $u \geq c$, on a :

$$f_c(u) \leq f_c(B) \iff u \leq B$$

- Comme f_c est strictement décroissante sur $]0; c]$ et continue, d'après le théorème de la bijection, f_c réalise une bijection de $]0; c]$ vers $\left[\lim_{u \rightarrow 0} f_c(u); f_c(c) \right[= [c(1 - \ln(c)); +\infty[$ (en effet $f_c(u) = u - c \ln u \xrightarrow{u \rightarrow 0^+} +\infty$). Ainsi, M admet un unique antécédent dans $]0; c]$ que l'on note b .
- Comme f_c est strictement croissante sur $]0; c]$, pour $u \in]0; c[$, $f_c(u) \leq f_c(b) = M$ si et seulement si $u \leq b$.

Par conséquent, pour tout $u > 0$, suivant que $u \leq c$ ou $u \geq c$, $f_c(u) \leq M$ ssi $b \leq u \leq B$.

7. (a) i. Pour tout $x > 0$ et $y > 0$, $V(x, y) = f_a(x) + f_1(y)$. Ainsi, pour tout $s \geq 0$, $V(x(s), y(s)) = f_a(x(s)) + f_1(y(s))$
- D'après la question 6a, pour tout $y > 0$, $f_1(y) \geq 1$. Donc pour tout $s \geq 0$, $V(x(s), y(s)) \geq f_a(x(s)) + 1$, par conséquent, $f_a(x(s)) \leq V(x(s), y(s)) - 1$.
 - De même, pour tout $x > 0$, $f_a(x) \geq a(1 - \ln(a))$, donc $V(x(s), y(s)) \geq a(1 - \ln(a)) + f_1(y(s))$, par conséquent, $f_1(y(s)) \leq V(x(s), y(s)) - a(1 - \ln(a))$.
- ii. Posons, pour $s \geq 0$,

$$g(s) = V(x(s), y(s)) = f_a(x(s)) + f_1(y(s)) = x(s) - a \ln(x(s)) + y(s) - \ln(y(s))$$

Par composée et somme de fonctions dérivables, g est dérivable sur \mathbb{R}_+ . Pour tout $s \geq 0$,

$$\begin{aligned} g'(s) &= x'(s) - a \frac{x'(s)}{x(s)} + y'(s) - \frac{y'(s)}{y(s)} \\ &= x(s) - x(s)y(s) - a \frac{x(s) - x(s)y(s)}{x(s)} - ay(s) + x(s)y(s) - \frac{-ay(s) + x(s)y(s)}{y(s)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, g est constante sur \mathbb{R}_+ .

- iii. Notons K la constante de g , d'après la question i, pour tout $s \geq 0$, $f_a(x(s)) \leq K - 1$, de plus, $a(1 - \ln(a)) \leq f_a(x(s))$ donc $a(1 - \ln(a)) \leq K - 1$. Or, d'après la question 6c, il existe b_x et B_x avec $0 < b_x < B_x$ tels que pour tout $u > 0$ $f_a(u) \leq K - 1$ si et seulement si $b_x \leq u \leq B_x$. Comme c'est le cas de $x(s)$, on en déduit que $b_x \leq x(s) \leq B_x$.
- De même, d'après la question i, pour tout $s \geq 0$, $f_1(y(s)) \leq K - a(1 - \ln(a))$, comme $a(1 - \ln(1)) \leq f_1(y(s))$, on peut donc appliquer la question 6c à $K - a(1 - \ln(a))$, il existe b_y et B_y avec $0 < b_y < B_y$ tels que pour tout $u > 0$, $f_1(u) \leq K - a(1 - \ln(a))$ ssi $b_y \leq u \leq B_y$. Comme c'est le cas de $y(s)$, on en déduit que pour tout $s \geq 0$, $b_y \leq y(s) \leq B_y$.
- (b) Comme pour tout $x > 0$, $f_a(x) \geq a(1 - \ln(a))$ et pour tout $y > 0$, $f_1(y) \geq 1$, on en déduit par somme que $V(x, y) = f_a(x) + f_1(y) \geq a(1 - \ln(a)) + 1$. De plus, comme $f_a(1) \geq a(1 - \ln(a))$ et $f_1(1) \geq 1$, $V(x, y) = 1 + a(1 - \ln(a))$ si et seulement si $f_a(x) = a(1 - \ln(a))$ et $f_1(y) = 1$ ssi $x = a$ et $y = 1$ (en utilisant le résultat de 6b). Ainsi, l'équation $V(x, y) = 1 + a(1 - \ln(a))$ admet une unique solution $(x^*, y^*) = (a, 1)$.
- (c) i. Comme on a montré que pour tout $s \geq 0$, $x(s) \geq b_x$ et $y(s) \geq b_y$ avec $b_x > 0$ et $b_y > 0$, les populations de proies et de prédateurs ne peuvent pas s'éteindre. De même, le fait que, pour tout $s \geq 0$, $x(s) \leq B_x$ et $y(s) \leq B_y$ montre que leurs populations ne peuvent pas devenir arbitrairement grandes.
- ii. Comme les populations ne peuvent pas s'éteindre, si elles s'arrêtent d'évoluer c'est vers un point d'équilibre qui n'est pas $(0, 0)$ c'est donc $(a, 1)$. On suppose donc qu'il existe $t_0 > 0$ tel que $x(t_0) = a$ et $y(t_0) = 1$, ainsi, $V(x(t_0), y(t_0)) = 1 + a(1 - \ln(a))$, comme $s \mapsto V(x(s), y(s))$ est constante, on en déduit que pour tout $s \geq 0$, $V(x(s), y(s)) = 1 + a(1 - \ln(a))$, d'après la question 7b, on en déduit que pour tout $s \geq 0$, $x(s) = a$ et $y(s) = 1$ donc $x_0 = a$ et $y_0 = 1$. Réciproquement, si $x_0 = a$ et $y_0 = 1$, alors comme le raisonnement que l'on vient de faire, montre que pour tout s , $x(s) = a$ et $y(s) = 1$ donc que la population est constante. Ainsi, le seul cas où la population s'arrête d'évoluer est si les conditions initiales sont $x_0 = a$ et $y_0 = 1$.
- iii. Il est hautement improbable que ces conditions initiales soient exactement atteintes, ainsi on est dans un cas où les populations vont évoluer sans cesse tout en ne pouvant pas s'éteindre ni prendre des valeurs arbitrairement grandes.

3 Modèle proie-prédateur avec environnement limité

8. Si K est très grand, le terme $\frac{x}{K}$ est négligeable devant 1 et l'équation (7) devient proche de (5), si $y = 0$, il n'y a plus de prédateurs et (7) devient (2).
9. (x, y) est un point d'équilibre ssi

$$\begin{aligned} \begin{cases} y(x-a) = 0 \\ x(1 - \frac{x}{K} - y) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} y = 0 \\ x(1 - \frac{x}{K}) = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = a \\ y = 1 - \frac{a}{K} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 0 \\ x = K \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 1 - \frac{a}{K} \\ x = a \end{cases} \end{aligned}$$

$x = 0 = y$ veut dire qu'il n'y ni proies ni prédateurs, $y = 0$ et $x = K$ veut dire qu'il n'y a pas de prédateurs et que les proies sont à l'équilibre par rapport à leur milieu. $(a, 1 - \frac{a}{K})$ équilibre entre milieu et proies et équilibre entre proies et prédateurs.

10. (a) $J(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2x}{K} - y & -x \\ y & x - a \end{pmatrix}$
- (b) Pour $x = y = 0$, on trouve $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, pour $x = K$ et $y = 0$ et $\begin{pmatrix} -1 & -K \\ 0 & K - a \end{pmatrix}$, pour $x = a$ et $y = 1 - \frac{a}{K}$, on a $\begin{pmatrix} -\frac{a}{K} & -a \\ 1 - \frac{a}{K} & 0 \end{pmatrix}$
- (c) Comme J_1 et J_2 sont triangulaires, les valeurs propres se lisent sur la diagonales, les valeurs propres de J_1 sont 1 et $-a$, les valeurs propres de J_2 sont -1 et $K - a$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, λ est valeur propre de J_3 ssi $\det(J_3 - \lambda I_2) = 0$ ssi $(-\frac{a}{K} - \lambda)(-\lambda) + a(1 - \frac{a}{K}) = 0$ ssi $\lambda^2 + \frac{a}{K}\lambda + a(1 - \frac{a}{K}) = 0$. On calcule donc le discriminant et on donne les racines suivant son signe...
- (d) Flemme
- (e) Reflemme

4 Résolution numérique du système différentielle

11.

$$\begin{aligned} v_{k+1} - v_k &= V(x_{k+1}, y_{k+1}) - V(x_k, y_k) = x_{k+1} - a \ln(x_{k+1}) + y_{k+1} - \ln(y_{k+1}) - x_k + a \ln(x_k) - y_k + \ln(y_k) \\ &= x_k + h(x_k - x_k y_k) - a \ln(x_k + h(x_k - x_k y_k)) + y_k + h(-a y_k + x_k y_k) - \ln(y_k + h(-a y_k + x_k y_k)) \\ &\quad - x_k + a \ln(x_k) - y_k + \ln(y_k) \\ &= h x_k - a h y_k - a \ln(1 + h(1 - y_k)) - \ln(1 + h(x_k - a)) \end{aligned}$$

12. En utilisant 6a avec $c = 1$, pour tout $u > 0$, $u - \ln(u) \geq 1$ donc $-\ln(u) \geq 1 - u$ (avec égalité ssi $u = 1$)