

## Problème 2

### Partie A

- (a) On a tiré une boule noire, donc on ajoute  $a = 3$  boules noires et  $b = 0$  boules blanches. À l'étape suivante, l'urne contient donc 6 boules noires et 5 boules blanches.

(b) Dans cet exemple,  $\sigma_A = 3$ , ce nombre veut dire qu'à chaque étape, on ajoute  $\sigma_A = 3$  boules. Soit  $k \in \mathbb{N}$ , le nombre total de boules après  $k$  tirages est donc de la forme  $2 + 3k$ . Supposons qu'à une étape donnée l'urne contient 20 boules noires et 22 boules blanches. donc  $20 + 22 = 42$  boules. Ainsi, il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $42 = 2 + 3k$  donc  $3k = 40$ , ainsi  $k = \frac{40}{3} = 13 + \frac{1}{3} \in \mathbb{N}$  ce qui absurde. Donc il est impossible qu'à une étape donnée, l'urne contienne 20 boules noires et 22 boules blanches.
- (a) Posons  $M = I_2 \in \mathcal{A}$ . Comme  $\frac{1}{2}M = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \notin \mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}$  n'est pas un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

(b) Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$ , si  $A = 0_2$ , alors  $\sigma_A = 0 + 0 = 0$ . Réciproquement, si  $\sigma_A = 0$ , alors  $a + b = 0$ , comme  $a \geq 0$  et  $b \geq 0$ , on peut<sup>1</sup> en déduire que  $a = 0$  et  $b = 0$ . De même, comme  $c + d = 0$ , on en déduit que  $c = d = 0$ , finalement  $M = 0_2$ .

(c) Soient  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  et  $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$  dans  $\mathcal{A}$ , et  $k \in \mathbb{N}$ .

Alors

$$A + kA' = \begin{pmatrix} a + ka' & b + kb' \\ c + kc' & d + kd' \end{pmatrix}$$

On observe que par produits et par sommes d'entiers naturels, les coefficients de  $A + kA'$  sont encore des entiers naturels. De plus,

$$\begin{aligned} (a + ka') + (b + kb') &= (a + b) + k(a' + b') = \sigma_A + k\sigma_{A'} \\ (c + kc') + (d + kd') &= (c + d) + k(c' + d') = \sigma_A + k\sigma_{A'} \end{aligned}$$

Ainsi,  $A + kA' \in \mathcal{A}$ .

- (d) Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ ,  $AA' = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$ , par produits et sommes d'entiers naturels, les coefficients de  $AA'$  sont des entiers naturels. De plus,

$$\begin{aligned} (aa' + bc') + (ab' + bd') &= a(a' + b') + b(c' + d') = a\sigma_{A'} + b\sigma_{A'} = (a + b)\sigma_{A'} = \sigma_A\sigma_{A'} \\ (ca' + dc') + (cb' + dd') &= c(a' + b') + d(c' + d') = c\sigma_{A'} + d\sigma_{A'} = (c + d)\sigma_{A'} = \sigma_A\sigma_{A'} \end{aligned}$$

Ceci prouve que  $AA' \in \mathcal{A}$ .

- (a) Comme  $A \in \mathcal{A}$ ,

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b \\ c + d \end{pmatrix} = \sigma_A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De plus,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est non nul, on peut en conclure que  $\sigma_A$  est une valeur propre et que  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre associé.

- (b) Comme  $a + b = c + d$ , «en faisant passer  $b$  et  $c$  de l'autre côté», on en déduit,  $d - b = a - c$ .  
 $A - \delta_A I_2 = \begin{pmatrix} a - \delta_A & b \\ c & d - \delta_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & b \\ c & b \end{pmatrix}$ , on remarque que  $\begin{pmatrix} b \\ -c \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A - \delta_A I_2)$

Ainsi, si  $b \neq 0$  ou  $c \neq 0$ ,  $\begin{pmatrix} b \\ -c \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de  $A$  pour la valeur propre  $\delta_A$ . Si  $b = c = 0$ ,

alors  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$  avec  $\sigma_A = a = d$ , donc  $A = aI_2$ , dans ce cas  $\delta_A = a - c = a$  et  $\delta_a$  est valeur propre de  $A$  (matrice diagonale, donc son spectre vaut  $\{a\}$ ). Dans tous les cas, on a montré que  $\delta_A$  est une valeur propre de  $A$ .

1. En effet si  $a > 0$  ou  $b > 0$ , alors par somme  $a + b > 0$  ce qui est impossible.

4. (a)  $\sigma_A \delta_A = (d-b)(a+b) = ad+b(-a-b+d) = ad+b(d-\sigma_A) = ad+b(d-(d-c)) = ad+b(-c) = \det(A)$   
 (b)  $AA' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \det(A)I_2 = \sigma_A \delta_A I_2$  (en utilisant le résultat de la question 4a).  
 (c) Si  $A = I_2 \in \mathcal{A}$ , alors  $A^{-1} = I_2 \in \mathcal{A}$ , si  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , alors  $A^{-1} = A \in \mathcal{A}$ . Supposons que  $A$  soit inversible et que son inverse soit dans  $\mathcal{A}$ , alors nécessairement,  $\det(A) \neq 0$ . D'après le résultat de la question précédente

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A' = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

- Si  $\det A > 0$ , alors comme  $A^{-1} \in \mathcal{A}$ ,  $\frac{-b}{\det(A)} \in \mathbb{N}$ , mais  $-b \leq 0$  et  $\det(A) > 0$  donc nécessairement  $b = 0$ , de même  $-c = 0$  donc  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ , comme  $A$  est inversible nécessairement  $a \neq 0$  et  $d \neq 0$  et  $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} \end{pmatrix}$ , comme  $a \in \mathbb{N}^*$  et  $\frac{1}{a} \in \mathbb{N}^*$  Donc nécessairement  $a = 1$ , de même  $d = 1$  et  $A = I_2$ .
- Si  $\det A < 0$ , alors comme  $A^{-1} \in \mathcal{A}$ ,  $\frac{a}{\det A} \geq 0$  comme  $a \geq 0$  et  $\det A < 0$ , nécessairement  $a = 0$  de même  $d = 0$ , donc  $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$  et  $\det A = -bc \neq 0$  donc  $b \neq 0$  et  $c \neq 0$  de sorte que et  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix}$ . Comme  $A \in \mathcal{A}$  et  $A^{-1} \in \mathcal{A}$ ,  $b \in \mathbb{N}$  et  $\frac{1}{b} \in \mathbb{N}$ , nécessairement  $b = 0$  de même,  $c = 1$  donc  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Finalement  $A$  est inversible et  $A^{-1} \in \mathcal{A}$  si et seulement si  $A = I_2$  ou  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

5. (a) Comme  $c \geq 0$  et  $b \geq 0$ ,  $\delta_A = a - c \leq a \leq a + b = \sigma_A$ . Il y a donc que deux cas  $\delta_A < \sigma_A$  ou  $\delta_A = \sigma_A$  :
- Si  $\delta_A < \sigma_A$ , alors  $A$  possède deux valeurs propres distinctes et  $A$  est une matrice carrée d'ordre 2.
  - Si  $\delta_A = \sigma_A$ , alors  $a - c = a + b$  donc  $-c = b$  comme  $-c \leq 0$  et  $b \geq 0$ , on en déduit que  $b = c = 0$ , donc  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$  donc  $A$  est diagonale et ainsi diagonalisable.
- (b) On prend  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ , alors les coefficients de  $A$  sont bien des entiers naturels,  $1+0 \neq 5+2$  donc la matrice est bien une matrice d'ajout non équilibré. Comme  $A$  est triangulaire,  $\text{Sp}(A) = \{0, 2\}$ , comme  $A$  est une matrice carrée d'ordre 2 possédant deux valeurs propres distinctes,  $A$  est diagonalisable.
- (c) On pose  $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , les coefficients de  $A$  sont bien des entiers naturels,  $1+5 \neq 0+1$  donc la matrice  $A$  est bien une matrice d'ajout non équilibre. Comme  $A$  est triangulaire,  $\text{Sp}(A) = \{1\}$ . Supposons que  $A$  soit diagonalisable, alors il existe une matrice inversible et  $D$  une matrice diagonale telle que  $A = PDP^{-1}$ , avec les coefficients diagonaux de  $D$  qui sont des valeurs propres de  $A$  donc  $D = I_2$ , ainsi,  $A = PP^{-1} = I_2$  ce qui est absurde. Ainsi,  $A$  n'est pas diagonalisable.

## Partie B

6. (a) Soit  $s$  une issue de  $S_n$ , notons  $k$  le nombre de fois où on a tiré une boule noire, comme on a fait  $n$  tirages, nécessairement  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ . Comme à chaque étape, on ajoute 0 boules noires (si on a tiré une boule blanche) ou  $\alpha$  boules noires (si on a tiré une boule noire), et qu'il y a une boule noire initialement,  $s = 1 + k\alpha$ . Ainsi,

$$S_n(\Omega) \subset \{1 + k\alpha | k \in \llbracket 0; n \rrbracket\} = \{1, 1 + \alpha, 1 + 2\alpha, \dots, 1 + n\alpha\}$$

Réciproquement, soit  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , alors il est possible (avec une probabilité non nulle) que les  $k$  premiers tirages aient donné des boules noires et les  $n - k$  derniers des boules blanches. Dans ce cas, le nombre de boules noires, après  $n$  tirages, vaudra  $1 + k\sigma$ . Donc  $\{1 + k\alpha | k \in \llbracket 0; n \rrbracket\} \subset S_n(\Omega)$ . Par double inclusion, on a montré que  $S_n(\Omega) = \{1 + k\alpha | k \in \llbracket 0; n \rrbracket\}$ .

$S_0$  vaut 1, car il y a initialement une boule noire. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $\omega \in \Omega$ .  $X_{n+1}(\Omega) = \{0, 1\}$ .

- Si  $X_{n+1}(\omega) = 0$ , alors lors du  $n + 1$ -ième tirage, on a tiré une boule blanche, de sorte que  $S_{n+1}(\omega) = S_n(\omega)$ , ainsi,  $S_{n+1}(\omega) - S_n(\omega) = 0 = \alpha X_{n+1}(\omega)$ .
- Si  $X_{n+1}(\omega) = 1$ , alors, lors du  $n + 1$ -ième tirage, on a tiré une boule noire, on rajoute donc dans l'urne  $\sigma$  boule noire, donc  $S_{n+1}(\omega) = S_n(\omega) + \sigma$ , de sorte que  $S_{n+1}(\omega) - S_n(\omega) = \sigma X_{n+1}(\omega)$ .

Donc

$$S_{n+1} - S_n = \alpha X_{n+1}$$

- (b) À chaque tirage, on rajoute  $\sigma$  boules, ainsi après  $n$  tirages, on a rajouté  $n\sigma$  boules et il y en avait deux initialement. Ainsi, après  $n$  tirages, il y a  $2 + \alpha n$  boules. Lorsque l'évènement  $(S_n = s)$  est réalisé, il y a donc  $s$  boules noires sur un total de  $2 + \alpha n$ , comme les boules sont indiscernables au toucher, la probabilité de tirer une boule noire vaut donc le nombre de boules noires divisé par le nombre total de boules dans l'urne :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | S_n = s) = \frac{s}{2 + \alpha n}.$$

7. (a) Comme<sup>2</sup>  $X_{n+1}(\Omega) = \{0, 1\}$

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = 0 \cdot \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) + 1 \cdot \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 1)$$

Or, les évènements  $(S_n = s)$ , pour  $s \in S_n(\Omega)$ , forment un système complet d'évènements. Par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) &= \sum_{s \in S_n(\Omega)} \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | S_n = s) \mathbb{P}(S_n = s) \\ &= \sum_{s \in S_n(\Omega)} \frac{s}{2 + \alpha n} \mathbb{P}(S_n = s) \\ &= \frac{1}{2 + \alpha n} \sum_{s \in S_n(\Omega)} s \mathbb{P}(S_n = s) = \frac{\mathbb{E}(S_n)}{2 + \alpha n} \end{aligned}$$

On a ainsi montré que  $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \frac{\mathbb{E}(S_n)}{2 + \alpha n}$ .

- (b) On pose, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(n) : \langle \mathbb{E}(S_n) = \frac{2 + \sigma n}{2} \rangle$ .

- Pour  $n = 0$ , comme  $S_0 = 1$ ,  $\mathbb{E}(S_0) = 1$ , et  $\frac{2 + \sigma n}{2} = 1$ , donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons  $\mathcal{P}(n)$  vraie, alors d'après la question 6a,  $S_{n+1} = S_n + \sigma X_{n+1}$ , donc par linéarité de l'espérance,  $\mathbb{E}(S_{n+1}) = \mathbb{E}(S_n) + \sigma \mathbb{E}(X_{n+1})$ , en utilisant le résultat de la question 7a,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_{n+1}) &= \mathbb{E}(S_n) + \sigma \frac{\mathbb{E}(S_n)}{2 + \alpha n} \\ &= \mathbb{E}(S_n) \left( 1 + \frac{\sigma}{2 + \alpha n} \right) = \mathbb{E}(S_n) \frac{2 + \alpha n + \sigma}{2 + \alpha n} = \frac{2 + \sigma n}{2} \cdot \frac{2 + \sigma(n+1)}{2 + \alpha n} \\ &= \frac{2 + \sigma(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{P}(n + 1)$  est vraie.

Par récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie.

2. On peut obtenir directement l'espérance car  $X_{n+1}$  est une variable aléatoire de Bernoulli

(c) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , en utilisant la question 7a,  $\mathbb{E}(X_n) = \frac{\mathbb{E}(S_{n-1})}{2 + \sigma(n-1)}$ , puis en utilisant la question 7b,

$$\mathbb{E}(X_n) = \frac{2 + \sigma(n-1)}{2 + \sigma(n-1)} = \frac{1}{2}$$

Ainsi,  $\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}$ , comme  $X_n(\Omega) = \{0, 1\}$ , on en déduit que  $X_n$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{2}$ .