Problème :

I. Matrice de transition

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par produit de deux matrices :

$$A_2 Y_n = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 1) \end{pmatrix}$$

Les évènements $(X_n = 0)$, $(X_n = 1)$ et $(X_n = 2)$ forment un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(X_{n+1} = 0\right) =& \mathbb{P}\left(X_{n+1} = 0 | X_n = 0\right) \mathbb{P}\left(X_n = 0\right) + \mathbb{P}\left(X_{n+1} = 0 | X_n = 1\right) \mathbb{P}\left(X_n = 1\right) \\ &+ \mathbb{P}\left(X_{n+1} = 0 | X_n = 2\right) \mathbb{P}\left(X_n = 2\right) \\ =& \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(X_n = 1\right) \end{aligned}$$

En effet, si $(X_n = 0)$ est réalisé, alors l'urne 1 est vide et donc le nombre tiré au hasard dans $[\![1\,;2]\!]$ sera strictement supérieur à 0, donc l'urne 1 va gagner une boule et donc $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 0) = 0$. Si $(X_n = 1)$ est réalisé, alors il y a une boule dans l'urne 1, la probabilité de tiré un nombre au hasard dans $[\![1\,;2]\!]$ inférieur ou égale à 1 vaut donc $1/2$, ainsi, $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 1) = 1/2$. Si $(X_n = 2)$ est réalisé, alors on est certain de tirer un nombre inférieur ou égale à 2 et donc on est certain que l'urne 1 va perdre une seule boule, donc $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 2) = 0$. De même,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(X_{n+1} = 1\right) &= \mathbb{P}\left(X_{n+1} = 1 | X_n = 0\right) \mathbb{P}\left(X_n = 0\right) + \mathbb{P}\left(X_{n+1} = 1 | X_n = 1\right) \mathbb{P}\left(X_n = 1\right) \\ &\quad + \mathbb{P}\left(X_{n+1} = 1 | X_n = 2\right) \mathbb{P}\left(X_n = 2\right) \\ &= 1 \cdot \mathbb{P}\left(X_n = 0\right) + 1 \cdot \mathbb{P}\left(X_n = 2\right) \\ \mathbb{P}\left(X_{n+1} = 2\right) &= \mathbb{P}\left(X_{n+1} = 2 | X_n = 0\right) \mathbb{P}\left(X_n = 0\right) + \mathbb{P}\left(X_{n+1} = 2 | X_n = 1\right) \mathbb{P}\left(X_n = 1\right) \\ &\quad + \mathbb{P}\left(X_{n+1} = 2 | X_n = 2\right) \mathbb{P}\left(X_n = 2\right) \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(X_n = 1\right) \end{aligned}$$

Ainsi, d'après ces relations de récurrence et le produit AY_n déjà réalisé, on peut en conclure que $A_2 Y_n = Y_{n+1}$.

(b) Soit [1] $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}\left(A_2 - \lambda I_3\right) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -\lambda & 1/2 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1/2 & -\lambda \end{pmatrix} &\underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\lambda \end{pmatrix} \\ \underset{L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1}{=} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1/2 - \lambda^2 & \lambda \\ 0 & 1/2 & -\lambda \end{pmatrix} &\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{=} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} - \lambda^2 & \lambda \\ 0 & 1 - \lambda^2 & 0 \end{pmatrix} \underset{C_3 \leftrightarrow C_2}{=} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\lambda \\ 0 & \lambda & \frac{1}{2} - \lambda^2 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

---

1. On peut éviter ce calcul, si on a l'œil que $A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Comme les trois vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont non nuls, 0, 1 et -1 sont donc des valeurs propres de A, comme A est d'ordre 3, elle a au plus trois valeurs et on a donc trouvé toutes les valeurs propres de A.

Ainsi, pour $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0,1,-1\}$, la matrice obtenue et échelonnée et a trois pivots donc $A-\lambda I_3$ est inversible. Si $\lambda = \pm 1$, la matrice obtenue est échelonnée et a deux pivots, et donc $A-\lambda I_3$ n'est pas inversible Si $\lambda = 0$, les deux dernières lignes sont colinéaires, donc $A - 0I_3$ n'est pas inversible. Ceci montre que 0, 1 et -1 sont des valeurs propres. Ainsi les valeurs propres de A_2, sont 0, 1 et -1, A_2 est une matrice carrée d'ordre » admettant trois valeurs propres distinctes, donc A_2 est diagonalisable.

2. Les évènements $(X_n=0)$, $(X_n=1)$, …, $(X_n=N)$ forment un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, pour tout $i \in [\![0\,;N]\!]$:

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=i) = \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}(X_{n+1}=i|X_n=k)\,\mathbb{P}(X_n=k)$$

Or, si $k \neq i-1$ et $k \neq i+1, \mathbb{P}(X_{n+1}=i|X_n=k)=0$. De plus, si $i-1 \geqslant 0, \mathbb{P}(X_{n+1}=i|X_n=i-1) = \dfrac{N-i+1}{N}$ (probabilité de choisir un nombre strictement supérieur au nombre de boules contenues dans U_1 c'est-à-dire $i-1$) et, si $i+1 \leqslant N, \mathbb{P}(X_{n+1}=i|X_n=i+1) = \dfrac{i+1}{N}$ (probabilité de choisir un nombre entre 1 et $i+1$).
On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1}=0) &= \frac{1}{N}\mathbb{P}(X_n=1)\\
\mathbb{P}(X_{n+1}=N) &= \frac{1}{N}P(X_n=N-1)\\
\forall i \in [\![1\,;N-1]\!] \qquad \mathbb{P}(X_{n+1}=i) &= \frac{N-i+1}{N}\mathbb{P}(X_n=i-1) + \frac{i+1}{N}\mathbb{P}(X_n=i+1).
\end{aligned}$$

On a donc bien $Y_{n+1} = AY_n$, avec A la matrice donnée dans l'énoncé.

3. Pour $N=2$, ${A_2}^\top = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$X \in E_1({A_2}^\top) \iff {A_2}^\top X = X \iff \begin{cases} y & = x \\ \frac{x}{2}+\frac{z}{2} & = y \\ y & = z \end{cases} \iff x=y=z$$
$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} \iff X \in \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Ainsi, $E_1\left({A_2}^\top\right) = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Pour $N=3$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$ et ${A_3}^\top = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in E_1\left({A_3}^\top\right) \iff {A_3}^\top X = X \iff \begin{cases} y & = x \\ \frac{x}{3}+\frac{2z}{3} & = y \\ \frac{2y}{3}+\frac{t}{3} & = z \\ z & = t \end{cases} \iff x=y=z=t \iff X = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ x \end{pmatrix}$$

Ainsi, $E_1\left({A_3}^\top\right) = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

4. On pose X le vecteur de $\mathscr{M}_{N+1,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1, alors $A^\top X = X$, (car la somme des coefficients sur chaque ligne de $A^\top$ vaut 1). Comme X est non nul, cela montre que 1 est une valeur propre de $A^\top$.
5. Comme le rang d'une matrice est égal à sa transposée et que la transposée est linéaire on a :

$$\mathrm{rg}(A - I_{N+1}) = \mathrm{rg}((A - I_{N+1})^\top) = \mathrm{rg}(A^\top - {I_{N+1}}^\top) = \mathrm{rg}(A^\top - I_{N+1}) < N + 1$$

(car 1 valeur propre de $A^\top$). Ainsi, $(A - I_{n+1})^\top$ n'est pas inversible, on en déduit aussi que 1 est valeur propre de A.

II. Détermination de l'espérance de la variable aléatoire X_n

1. Dans l'urne U_1, entre l'instant n et l'instant $n+1$, on a soit ajouté soit retiré une boule. Si on rajoute une boule, alors $X_{n+1} = X_n + 1$ et si on a retiré une boule, $X_{n+1} = X_n - 1$. Donc $(X_{n+1} - X_n)(\Omega) \subset \{-1; 1\}$.
2. D'après la question précédente

$$\mathbb{E}\left(X_{n+1} - X_n\right) = (-1) \times \mathbb{P}\left(X_{n+1} - X_n = -1\right) + 1 \times \mathbb{P}\left(X_{n+1} - X_n = 1\right)$$

Or, les évènements $(X_n = 0)$, $(X_n = 1)$, …, $(X_n = N)$ forment un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, pour tout $i \in [\![0 ; N]\!]$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_{n+1} - X_n = 1\right) &= \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}\left(X_{n+1} - X_n = 1 | X_n = k\right) \mathbb{P}\left(X_n = k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}\left(X_{n+1} = k + 1 | X_n = k\right) \mathbb{P}\left(X_n = k\right) = \sum_{k=0}^{N} \frac{N-k}{N} \times \mathbb{P}\left(X_n = k\right)\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_{n+1} - X_n = -1\right) &= \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}\left(X_{n+1} - X_n = -1 | X_n = k\right) \mathbb{P}\left(X_n = k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}\left(X_n = k\right) \mathbb{P}\left(X_{n+1} = k - 1 | X_n = k\right) = \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}\left(X_n = k\right) \times \frac{k}{N}\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(X_{n+1} - X_n\right) &= -\sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}\left(X_n = k\right) \times \frac{k}{N} + \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}\left(X_n = k\right) \times \frac{N-k}{N} \\ &= -\frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N} k\mathbb{P}\left(X_n = k\right) + \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}\left(X_n = k\right) = 1 - \frac{2}{N}\mathbb{E}\left(X_n\right)\end{aligned}$$

3. D'après la linéarité de l'espérance et la question précédente :

$$\mathbb{E}\left(X_{n+1}\right) = 1 + \frac{N-2}{N}\mathbb{E}\left(X_n\right).$$

$\left(\mathbb{E}\left(X_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite arithmético-géométrique. Pour tout $\ell \in \mathbb{R}$

$$\ell = 1 + \frac{N-2}{N}\ell \iff \ell\left(1 - \frac{N-2}{N}\right) = 1 \iff \ell\frac{2}{N} = 1 \iff \ell = \frac{N}{2}$$

Ainsi, posons $\ell = N/2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} \mathbb{E}(X_{n+1}) = & 1 + \dfrac{N-2}{N}\mathbb{E}(X_n) \\ \ell = & 1 + \dfrac{N-2}{N}\ell \end{cases}$$

Par différence, $\mathbb{E}(X_{n+1}) - \ell = \dfrac{N-2}{2}(\mathbb{E}(X_n) - \ell)$. Ainsi, la suite $(\mathbb{E}(X_n) - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $(N-2)/2$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_n) - \ell = \left(\dfrac{N-2}{N}\right)^n (\mathbb{E}(X_0) - \ell)$. On peut en conclure que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{E}\left(X_n\right) = \left(\frac{N-2}{N}\right)^n \left(\mathbb{E}\left(X_0\right) - \frac{N}{2}\right) + \frac{N}{2}$$

4. Comme $N > 2, 0 < \dfrac{N-2}{N} < 1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(X_n\right) = \dfrac{N}{2}$.
Au bout d'un temps très long on tend vers une répartition des boules moitié/moitié dans chaque urne.

III. Étude de la probabilité stationnaire

1. Montrons par récurrence que la propriété $\mathscr{P}(k)$: «$x_k = \binom{N}{k}x_0$ et $x_{k-1} = \binom{N}{k-1}x_0$», est vraie pour tout $k \in [\![1\,;N-1]\!]$.
   — Pour $k=0$, $\binom{N}{0}x_0 = 1 \times x_0$. De plus, d'après la première ligne de l'égalité $AX = X$, on a $\dfrac{1}{N}x_1 = x_0$, donc $x_1 = \binom{N}{1}x_0$, ainsi $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
   — Soit $k \in [\![1\,;N-2]\!]$ fixé. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie.
   On sait que $AX = X$, donc d'après la ligne $k+1$ on a :
   $$\frac{N-k+1}{N}x_{k-1} + \frac{k+1}{N}x_{k+1} = x_k$$
   En isolant x_{k+1}, on obtient :
   $$\begin{aligned} x_{k+1} &= \frac{N}{k+1}\binom{N}{k}x_0 - \frac{N-k+1}{k+1}\binom{N}{k-1}x_0 \\ &= \frac{N}{N-k}\binom{N}{k+1}x_0 - \frac{k}{N-k}\binom{N}{k+1}x_0 \\ &= \binom{N}{k+1}x_0 \end{aligned}$$
   Ainsi, $x_{k+1} = \binom{N}{k+1}x_0$ et $x_k = \binom{N}{k}x_0$ donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

   Par récurrence finie, on a montré que pour tout $k \in [\![0\,;N-1]\!], x_k = \binom{N}{k}x_0$. De plus, d,après la dernière ligne de l'égalité $AX = X$, on a, $\dfrac{1}{N}x_{N-1} = x_N$, donc $x_N = \dfrac{1}{N}\binom{N}{N-1}x_0 = \binom{N}{N}x_0$.
2. Posons
   $$C = \begin{pmatrix} 1 \\ \binom{N}{1} \\ \binom{N}{2} \\ \vdots \\ \binom{N}{N} \end{pmatrix}$$
   D'après la question précédente, $E_1 = \mathrm{vect}(C)$. Ainsi, (C) est une famille génératrice de E_1, comme c'est une famille d'un seul vecteur et que ce vecteur est non nal, (C) est une famille libre. Ainsi, (C) est une base de E_1, par conséquent, $\dim\left(E_1\right) = 1$.

3. D'après la formule du binôme de Newton, $S = (1+1)^N = 2^N$.

4. D'après la question 1. :
   $$\pi \in E_1 \iff \pi_k = \binom{N}{k}\pi_0$$

Donc pour que π appartienne à E_1 et que la somme de ses coordonnées soit égale à 1, il faut avoir $\pi_0 = \dfrac{1}{2^N}$. Réciproquement, le vecteur π tel que $\pi_k = \dfrac{1}{2^N}\binom{N}{k}$ appartient bien à E_1 et vérifie que la somme de ses coordonnées vaut 1.

$$\pi = \frac{1}{2^N}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \binom{N}{1} \\ \binom{N}{2} \\ \vdots \\ \binom{N}{N} \end{pmatrix}\right).$$

5. On reconnait ici que X_∞ suit une loi binomiale de paramètres N et $\dfrac{1}{2}$. On a donc $\mathbb{E}\left(X_\infty\right) = \dfrac{N}{2}$ et $\mathbb{V}\left(X_\infty\right) = \dfrac{N}{4}$.

6. On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}, Y_{n+1} = AY_n$.
   On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = A^n Y_0$. Or, comme X_0 suit la même loi que X_∞, on a $Y_0 = \pi$. Et comme $\pi \in E_1, A\pi = \pi$ et on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n\pi = \pi$.
   Ainsi, on a $Y_n = \pi$ et X_n suit donc la même loi que X_∞, c'est-à-dire une loi binomiale de paramètres N et $\dfrac{1}{2}$.
   Si on part avec une loi binomiale de paramètres N et $\dfrac{1}{2}$, on reste dans cet état à chaque étape (d'où le nom de la partie «loi stationnaire»).