Révision semaine 4 (y a pas eu de révisions semaine 3, sorry !)

Lundi : commencer la semaine en travaillant ses complexes

1. Déterminer un polynôme P tel que pour tout θ, $\cos(6\theta) = P(\cos(\theta))$
   Indication : écrire le cosinus comme la partie réel d'une exponentielle puis Moivre.
2. Écrire $\theta \mapsto \cos^6(\theta)$ comme une combinaison linéaires de fonctions $x \mapsto \cos(k\theta)$
   Indication : formule d'Euler

Mardi : faire des p'tits sommes puis intégrer

Trouver la limite de des suites définies par :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2+k^2}$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^2+kn}$
5. $\displaystyle\sum_{p=n}^{2n-1} \frac{1}{p}$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos(k\pi/2n)}{n}$

Mercredi : faire (et non pas regarder) des séries !

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = H_n - \ln(n)$ où $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge et en déduire que la suite $(u_n)_n$ converge.
   Indication : on pourra chercher un équivalent de $u_{n+1} - u_n$.
2. On pose, pour $n \geqslant 1$, $u_n = n^{2026} \exp(-n^{1/2026})$.
   (a) Déterminer la limite de $(n^2 u_n)_{n\in\mathbb{N}*}$. En déduire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $n^2 u_n \leqslant 1$.
   (b) Conclure sur la nature de $\sum u_n$.

Jeudi : dépasser ses limites !

Soit $x \in \mathbb{R}$. Quelles sont les limites des suites définies par :

1. $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$
2. $3 \times 2^{1/n} - 2 \times 3^{1/n}$
3. $\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$
4. $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$
5. $\cos(1/n)^{n^2}$

Vendredi : se projeter vers la réussite !

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y - 2z = 0\}$ et $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

1. Déterminer une base de F puis une base orthonormale de F, notée $\mathscr{B}_F$.
2. Déterminer l'expression de p la projection orthogonale de F puis A la matrice de p dans la base canonique, p est-il diagonalisable ?
3. Que vaut $p \circ p$? Que vaut A^2 ? Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, montrer que nécessairement $\lambda = 1$ ou $\lambda = 0$.
4. Déterminer la distance entre le vecteur $(1, 1, 1)$ et F.
5. Quelle est la dimension de $F^\perp$? En déduire une base de $F^\perp$, puis une base orthonormale, notée $\mathscr{B}_{F^\perp}$.
6. Justifier que $\mathscr{B}'$, la juxtaposition de $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_{F^\perp}$, est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice de p dans $\mathscr{B}'$ notée D (D pour ... ?).
7. Donner une relation entre A et D.