Révision semaine 1

Lundi

Mardi

Mercredi

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1+x^2}{2}$ de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Remarquons que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ (car f est dérivable et sa dérivée est positive sur $\mathbb{R}_+$). Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: «$u_n \in [\,0\,;1\,]$». Comme $u_0 = 0 \in [\,0\,;1\,]$, $\mathscr{P}(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$, alors $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, comme f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$, soit $1/2 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$, ainsi, $u_{n+1} \in [\,0\,;1\,]$, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [\,0\,;1\,]$. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1+{u_n}^2}{2} - u_n = \frac{1-2u_n+{u_n}^2}{2} = \frac{(1-u_n)^2}{2} \geqslant 0$$

Donc $u_n \leqslant u_{n+1}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Comme elle est croissante et majorée, d'après le théorème de la limite monotone, $(u_n)_n$ converge. Notons ℓ sa limite. Comme $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$, par décalage d'indice, $u_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$. De plus, par somme et produit de limite, $\dfrac{1+{u_n}^2}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1+\ell^2}{2}$. Par unicité de la limite, $\ell = \dfrac{1+\ell^2}{2}$, donc $2\ell = 1+\ell^2$ donc $(\ell-1)^2 = 0$, ainsi, $\ell = 1$. On a donc montré que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.

Jeudi

Soit $x > 3$, alors $\dfrac{x-3}{x-2} > 0$. En utilisant le développement limité $\ln(1-u) \underset{u\to 0}{=} -u + o(u)$:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x-3}{x-2}\right)^x &= \exp\left(x\ln\left(\frac{x-3}{x-2}\right)\right) = \exp\left(x\ln\left(1-\frac{3}{x}\right) - x\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)\right) \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \exp\left(x\left(-\frac{3}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) - x\left(-\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right) = \exp(-1+o(1))
\end{aligned}$$

Par continuité de la fonction exp en -1, on obtient que $\left(\dfrac{x-3}{x-2}\right)^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} \exp(-1)$.

Vendredi

On commence par écrire le développement limité de sin à l'ordre 3 en 0.

$$\exp(\sin(x)) \underset{x\to 0}{=} \exp\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$$

On pose $u = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$, alors $u \underset{x\to 0}{\to} 0$, on va donc utiliser le développement limité d'exponentielle en 0 :

- $u^2 = u \times u = \left(x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = x^2 + o(x^3)$
- $u^3 = u^2 \times u = \left(x^2 + o(x^3)\right)\left(x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = x^3 + o(x^3)$.
- Comme $u^3 \sim x^3$, $o(u^3) = o(x^3)$.

On va donc utiliser le développement limité d'exponentielle en 0 à l'ordre 3 :

$$\begin{aligned}
\exp(\sin(x)) &\underset{x\to 0}{=} \exp\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = \exp(u) \\
&\underset{u\to 0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 + o(x^3)\right) + \frac{1}{6}\left(x^3 + o(x^3)\right) + o(x^3) \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)
\end{aligned}$$