Révision semaine 5

Lundi

Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 10 \\ 10 & 0 & -20 \\ 5 & -1 & -8 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que 2 et -15 sont des valeurs propres de A.
2. Justifier que A est diagonalisable et diagonaliser A.
3. En déduire que A est inversible et qu'il existe R tel que $R^3 = A$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer une expression de A^n, A^{-1} et R sous forme de produits.
4. Calculer explicitement A^{10} en vous aidant de Python.

Mardi

Soit $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on définit la trace de M par $\operatorname{tr}(M) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_{i,i}$.

1. Démontrer que l'application $M \mapsto \operatorname{tr}(M)$ est linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.
2. Déterminer son image puis la dimension de son noyau.
3. Démontrer que, pour tout $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
4. En déduire que deux matrices semblables ont la même trace.

Mercredi

On pose $f(x) = x^2$ si $x \in \left]-3\,;2\right[$, $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$ si $x \geqslant 2$ et $f(x) = \dfrac{1}{x^5}$ si $x \leqslant 3$.

1. Démontrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge et calculer la valeur de cette intégrale.
2. En déduire $c \in \mathbb{R}$ tel que $x \mapsto cf(x)$ soit une densité de probabilité.

À partir de maintenant c est tel que $x \mapsto cf(x)$ est une densité de probabilité et X désigne une variable aléatoire dont la densité et $x \mapsto cf(x)$.

3. Déterminer les $k \in \mathbb{N}$, tel que X admette un moment d'ordre k et calculer ce moment le cas échéant.
4. Démontrer que X admet une variance et calculer-là.

Jeudi

Posons $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que A est diagonalisable et déterminer une matrice P inversible et D une matrice diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

On considère maintenant le système d'équations différentielles linéaires $\begin{cases} x'(t) & = & -x(t) + 2y(t) - z(t) \\ y'(t) & = & x(t) - z(t) \\ z'(t) & = & 2x(t) + 4y(t) - 4z(t) \end{cases}$ appelé $\star$ dont l'inconnue est le triplet de fonctions (x, y, z). Notons que $\star$ se reformule sous la forme $X' = AX$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

2. Démontrer que X est solution de $\star$ si et seulement si $P^{-1}X$ est solution d'un nouveau système d'équations différentielles linéaires notée $\star\star$.
3. Résoudre $\star\star$ et en déduire les solutions de $\star$.

Soit maintenant le système d'équations différentielles linéaires $\begin{cases} x'(t) & = -x(t) + 2y(t) - z(t) & -1 \\ y'(t) & = x(t) - z(t) & -2 \\ z'(t) & = 2x(t) + 4y(t) - 4z(t) & -3 \end{cases}$ notée $\star\star\star$.

4. Déterminer une solution particulière du système $\star\star\star$ notée X_P
5. Démontrer que les solutions de $\star\star\star$ sont exactement de la forme $X_P + X_H$ où X_H est solution de $\star$.
6. En déduire toutes les solutions de $\star\star\star$.

Vendredi

On dispose d'une pièce et d'un dé équilibré dont les lancers sont indépendants. On lance la pièce. On note X_1 la variable aléatoire indiquant le résultat. Si on tombe sur Pile, alors X_1 prendra la valeur 1 et 0 si on tombe sur Face. On lance alors le dé bleu $X_1 + 1$ fois, et on note X_2 la variable aléatoire indiquant le nombre de six obtenus. Par exemple : si on obtient pile, on lance deux fois le dé, si on obtient 3 et 5, alors $X_1 = 1$ et $X_2 = 0$.

1. Déterminer la loi de (X_1, X_2) sous forme d'un tableau.
2. Déterminer la loi de X_2.
3. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer l'espérance de X_1 et celle de X_2 ainsi que la covariance de X_1 et X_2.