

Révision semaine 2

Lundi

Mardi

On pose, pour $x \neq 0$, $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $f(0) = 0$.

1. Comme $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur \mathbb{R}^* et que \sin est continue sur \mathbb{R} , par composée, $x \mapsto \sin(1/x)$ est continue sur \mathbb{R}^* , comme $x \mapsto x^2$ est aussi continue sur \mathbb{R}^* , par produit, f est continue sur \mathbb{R}^* . De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, en encadrant \sin entre -1 et 1 et en multipliant par $x^2 > 0$, on obtient $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$. Comme $x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, d'après le théorème d'encadrement, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. De plus, $f(0) = 0$, donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} f(0)$. Ainsi, f est continue en 0 . On en conclut donc que f est continue sur \mathbb{R} .
2. Comme $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur \mathbb{R}^* et que \sin est dérivable sur \mathbb{R} , par composée, $x \mapsto \sin(1/x)$ est dérivable sur \mathbb{R}^* , comme $x \mapsto x^2$ est aussi dérivable sur \mathbb{R}^* , par produit, f est dérivable sur \mathbb{R}^* . De plus, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin(1/x)$. Or, $-1 \leq \sin(1/x) \leq 1$, si $x > 0$, on obtient $-x \leq x \sin(1/x) \leq x$ et si $x < 0$, on obtient $x \leq x \sin(1/x) \leq -x$, dans tous les cas, on a montré que pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$-|x| \leq \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leq |x|$$

Or, $|x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} |0| = 0$ (la valeur absolue étant continue en 0), d'après le théorème d'encadrement, on peut donc en conclure que $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

4. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, alors $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et $f'(x_n) = -1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1$. On pose également, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{1}{2}}$, alors $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et $f'(y_n) = \frac{1}{4n\pi + \pi} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, ainsi, f' n'a pas de limite¹ en 0 . Ainsi, f' n'est pas continue et f n'est pas de classe \mathcal{C}^1 .
5. Être dérivable et être de classe \mathcal{C}^1 , ce n'est pas la même chose! En particulier, si on fait des intégrations par parties, des changements de variables ou qu'on veut vérifier qu'une variable aléatoire est à densité, c'est le caractère de classe \mathcal{C}^1 qu'il faut mentionner et/ou justifier.

Mercredi

1. Les variables X et Y admettent des espérances. Par linéarité de l'espérance $X + Y$ aussi et

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{p} + \lambda$$

2. Les variables X et Y admettent des variances donc $-Y$ admet aussi une variance. De plus, comme X et Y sont indépendantes, d'après le lemme des coalitions X et $-Y$ sont également indépendantes. Ainsi :

$$\mathbb{V}(X - Y) = \mathbb{V}(X + (-Y)) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(-Y) = \mathbb{V}(X) + (-1)^2 \mathbb{V}(Y) = \frac{1-p}{p^2} + \lambda$$

3. Les événements $(X = k)$, pour $k \in \mathbb{N}^*$, forment un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}((X = Y) \cap (X = k)) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k) \mathbb{P}(X = k)$$

Comme X et Y sont indépendantes :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = p e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \frac{p}{1-p} e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{((1-p)\lambda)^k}{k!} = \frac{p}{1-p} e^{-\lambda} (e^{(1-p)\lambda} - 1) = \frac{p}{1-p} (e^{-p\lambda} - e^{-\lambda}) \end{aligned}$$

(où on a calculé la somme en ayant reconnu une série exponentielle)

1. En effet, si f' tendait vers une limite ℓ en 0 , alors pour toute suite $(w_n)_n$ telle que $w_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, on aurait, $f'(w_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$, on conclut par contraposée.

Jeudi

Vendredi

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^k}{k!} e^{-\frac{1}{n}}$$

- Pour $k = 0$, on obtient, $\mathbb{P}(X_n = 0) = e^{-\frac{1}{n}}$, or $-\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, par continuité de l'exponentielle en 0,

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = e^{-\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

- Si $k \in \mathbb{N}^*$, alors $1/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, par continuité de $x \mapsto x^k$, $(1/n)^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0^k = 0$ et $e^{-\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$, par produit, $\mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Posons alors X la variable aléatoire constante égale à 0, de sorte que $\mathbb{P}(X = 0) = 1$ et $\mathbb{P}(X = k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X = k)$, d'après la caractérisation de la convergence en loi pour les variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} , on peut en conclure que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X .