

# Révision semaine 4

## Lundi

1. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ , en utilisant la formule de Moivre, on obtient :

$$\cos(6\theta) = \operatorname{Re}(e^{i6\theta}) = \operatorname{Re}((e^{i\theta})^6)$$

On utilise maintenant, la définition de l'exponentielle complexe puis la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}(e^{i\theta})^6 &= (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^6 \\ &= \cos(\theta)^6 + 6 \cos(\theta)^5 i \sin(\theta) - 15 \cos(\theta)^4 \sin(\theta)^2 - 20 \cos(\theta)^3 i \sin(\theta)^3 + 15 \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^4 + 6 \cos(\theta) i \sin(\theta)^5 - \sin(\theta)^6\end{aligned}$$

En prenant la partie réelle on obtient :

$$\cos(6\theta) = \cos(\theta)^6 - 15 \cos(\theta)^4 (1 - \cos(\theta)^2) + 15 \cos(\theta)^2 (1 - \cos(\theta)^2)^2 - (1 - \cos^2(\theta))^3$$

On pose alors

$$P = X^6 - 15X^4(1 - X^2) + 15X^2(1 - X^2)^2 - (1 - X^2)^3$$

De sorte que  $\cos(6\theta) = P(\cos(\theta))$ . En développant par identité remarquable, on obtient que

$$P = 32X^6 - 48X^4 + 18X^2 - 1$$

- 2.

## Mardi

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , en factorisant par  $n$  :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$$

On pose alors,  $f: x \mapsto \frac{1}{1+x}$ ,  $f$  est continue sur  $[0; 1]$ , ainsi, d'après le théorème des sommes de Riemann,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x} = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$$

- 2.

- 3.

- 4.

5.  $\sum_{p=n}^{2n-1} \frac{1}{p} = \sum_{k=p-n}^{n-1} \frac{1}{n+k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln(2)$  (en utilisant le résultat de la question 1).

- 6.

## Mercredi

## Jedi

1. Remarquons que  $1 + \frac{x}{n} > 0$  ssi  $n+x > 0$  ssi  $n > -x$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n > -x$ , on a alors

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right)$$

alors comme  $\ln(1+u) = u + \mathcal{O}(u)$ ,  $\ln(1+x/n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} x/n + \mathcal{O}(1/n)$ . Donc

$$n \ln(1+x/n) = x + \mathcal{O}(1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$$

Par continuité de l'exponentielle en  $x$ ,  $\exp(n \ln(1+x/n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp(x)$ . On en conclut que

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp(x)$$

- 2.

- 3.

- 4.

- 5.

## Vendredi