1. (a)
   (b)
   (c)
   (d)
   (e)
   (f) Pour $i \in [\![ 1\,;n ]\!]$, on note $T_i$ la variable aléatoire valant 1 si la $i$-ième personne testée possède la propriété et 0 sinon. On cherche à calculer $\mathbb{P}(A|B)$ où $A$ est l'évènement «les $k$ premières personnes sont négatives» et $B$ : «le mélange est positif». Or, $\overline{B} = \bigcap\limits_{i=1}^{n}(T_i = 0)$, par indépendance des $T_i$, $\mathbb{P}(\overline{B}) = \prod\limits_{i=1}^{n}\mathbb{P}(T_i = 0) = q^n$ donc $\mathbb{P}(B) = 1 - q^n > 0$ Ainsi, $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$. Or, $A \cap B$ veut dire que les $k$ premiers patients sont tous négatifs et qu'au moins l'un des $n-k$ derniers et positifs. Or comme une somme de nombres positifs est nul si et seulement tous sont nuls :

$$A \cap B = \left(\sum_{i=1}^{k} T_i = 0\right) \cap \left(\sum_{i=k+1}^{n} T_i \neq 0\right)$$

Comme $T_1, \dots, T_n$ sont indépendantes, d'après le lemme des coalitions, $\sum\limits_{i=1}^{k} T_i$ et $\sum\limits_{i=k+1}^{n} T_i$ sont indépendantes, ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{k} T_i = 0\right)\mathbb{P}\left(\sum_{i=k+1}^{n} T_i \neq 0\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k}(T_i = 0)\right)\left(1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=k+1}^{n} T_i = 0\right)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k}(T_i = 0)\right)\left(1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=k+1}^{n} (T_i = 0)\right)\right) \\
&= \prod_{i=1}^{k}\mathbb{P}(T_i = 0)\left(1 - \prod_{i=k+1}^{n}\mathbb{P}(T_i = 0)\right) && \text{par indépandance} \\
&= q^k(1 - q^{n-k})
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{q^k - q^n}{1 - q^n}$

2.
3.