

Exercice 1. *Vrai ou Faux*

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. Pour chaque assertion, déterminer si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie, la justifier. Si elle est fausse, donner un contre-exemple.

1. Le produit d'une suite quelconque et d'une suite qui converge vers 0, converge vers 0.
2. Une suite qui converge vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
3. Si une suite converge vers une limite strictement positive, alors tous ses termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang.
4. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergent alors $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.
5. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergent alors $(u_n \times v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.
6. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et (v_n) diverge alors $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.
7. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge alors $(u_n \times v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.
8. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée, alors elle tend vers $+\infty$.
9. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ , alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. On traitera d'abord le cas $\ell \neq 0$.
10. Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim x_n$, alors $u_n + w_n \sim v_n + x_n$.
11. Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim x_n$, alors $u_n \cdot w_n \sim v_n \cdot x_n$.
12. Si $u_n \sim v_n$, alors $\exp(u_n) \sim \exp(v_n)$.
13. Si $u_n \sim v_n$, alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.

Exercice 2. Montrer que les couples suivants de suites réelles (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -\frac{1}{n+1}$ et $v_n = \frac{1}{n+3}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

Exercice 3. Calculer les limites suivantes.

1. $\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$ en 1.
2. $\sqrt{x^2 + 2x} - x$ en $+\infty$.
3. $\frac{x + \cos x}{x + \sin x}$ en $+\infty$.
4. $\frac{e^{3x+2} - e^2}{x}$ en 0.

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \dots \left(1 + \frac{n-1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{n}{n^2}\right).$$

On pose $v_n = \ln(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer, pour tout $x \geq 0$, l'inégalité

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, rappeler la valeur de

$$\sum_{k=1}^n k^2.$$

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq v_n \leq \frac{n+1}{2n}.$$

4. Montrer que $(v_n)_{n \geq 1}$ converge, et préciser sa limite.

5. Montrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ converge, et préciser sa limite.

Exercice 5. On considère la fonction $f : x \mapsto x + 1 + \frac{x-1+\ln x}{x^2}$ définie sur $I =]0, +\infty[$.

1. Prouver que f réalise une bijection sur I et calculer son image.

2. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur I .

3. Montrer que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

Exercice 6. On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$, discuter du nombre de solution de l'équation $f(x) = \alpha$ en fonction de la valeur de α :

1. $\alpha > 1$.

2. $\alpha = -3$.

3. $\alpha \in]-3, 1[$.

Exercice 7. Donner l'expression du terme général des suites suivantes.

1. $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.

2. $v_0 = 1$, $v_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $2v_{n+2} = 3v_{n+1} - v_n$.

3. $w_0 = 1$, $w_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+2} = w_{n+1} - w_n$.

Exercice 8. *Un exercice en or*

On appelle nombre d'or (noté Φ) la solution réelle positive de l'équation suivante d'inconnue x

$$x^2 = x + 1.$$

1. Montrer que $1 < \Phi < 2$.

2. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^\times}$ définie sur $\mathbb{N}^\times$ par $u_1 = \sqrt{1}$, $u_2 = \sqrt{1 + \sqrt{1}}$, $u_3 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}$ et ainsi de suite.

Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier $n \geq 1$.

3. Écrire une fonction en Python qui permet de calculer le n -ème terme de cette suite.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$,

$$1 \leq u_n \leq \Phi.$$

5. Montrer que (u_n) est croissante.

6. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^\times}$ converge vers Φ .

7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$

$$|u_n - \Phi| \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Piste : On pourra montrer que $|u_n - \Phi| \leq \frac{|u_{n-1} - \Phi|}{2}$

Exercice 9. On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 \geq 0$ et $f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Étudier la fonction f ainsi que le signe de $f(x) - x$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. On suppose que (u_n) converge vers ℓ , quelles sont les valeurs possibles pour ℓ .

2. (a) On suppose que $u_0 \in [0, \frac{1}{4}]$, montrer que $u_n \in [0, \frac{1}{4}]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 (b) Montrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante puis en déterminer la nature (si elle converge on donnera sa limite).
3. (a) On suppose que $u_0 \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$, montrer que $u_n \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 (b) Montrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante puis en déterminer la nature (si elle converge on donnera sa limite).
4. On suppose que $u_0 > \frac{3}{4}$, montrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante. Quelle est la nature de $(u_n)_{n \geq 0}$ (si elle converge on en donnera la limite).

Exercice 10. Donner un équivalent simple des suites suivantes.

1. $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$

3. $w_n = \frac{n^3 - \sqrt{1+n^2}}{\ln(n) - 2n^2}$

2. $v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$.

4. $x_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.