

TD0 - Trigonométrie

1 BCPST 2 - A. Plouviez

Feuille d'exercice

Année 2025- 2026

Indication sur les niveaux : ♡ Entraînement

★ Facile

★★ Moyen

★★★ Difficile

Trigonométrie

Exercice 1 : ♡ Calculer les différentes valeurs de ces cos et sin.

- 1) $\cos \frac{-\pi}{3}$ 2) $\cos \frac{11\pi}{6}$ 3) $\sin \frac{18\pi}{2}$ 4) $\sin \frac{9\pi}{4}$ 5) $\cos(35\pi)$ 6) $\cos \frac{999\pi}{2}$
7) $\sin \frac{7\pi}{6}$ 8) $\cos \frac{7\pi}{4}$ 9) $\sin \frac{21\pi}{7}$ 10) $\sin \frac{45\pi}{2}$ 11) $\cos \frac{15\pi}{6}$ 12) $\sin \frac{-13\pi}{3}$
13) $\cos(\sin(0))$ 14) $\sin\left(\cos \frac{\pi}{2}\right)$
-

- Réponses : 1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3) 0 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 5) -1 6) 0
7) $-\frac{1}{2}$ 8) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 9) 0 10) 1 11) 0 12) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 13) 1 14) 0

Exercice 2 : ★ Calculer les différentes valeurs de ces cos et sin.

- 1) $\sin \frac{1791\pi}{2}$ 2) $\cos \frac{2025\pi}{3}$ 3) $\cos \frac{5000\pi}{6}$ 4) $\sin \frac{1111\pi}{6}$ 5) $\sin \frac{333\pi}{4}$
-

Réponses : Ces exercices se résolvent avec des simplifications et/ou divisions euclidiennes.

1) On remarque que $1791 = 4 \times 447 + 3$ (division euclidienne par 4.

$$\text{Donc } \sin \frac{1791\pi}{2} = \sin \left(447 \frac{4\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} \right) = \sin \left(447 \times 2\pi + \frac{3\pi}{2} \right) = \sin \frac{3\pi}{2} = \boxed{-1}$$

2) On remarque que $2025 = 3 \times 675$. Donc $\cos \frac{2025\pi}{3} = \cos(675\pi) = \boxed{-1}$

3) Déjà, il est utile de se rendre compte que $\frac{5000\pi}{6} = \frac{2500\pi}{3}$.

On fait la division euclidienne de 2500 par 6 : on trouve $2500 = 6 \times 316 + 4$

$$\text{Ainsi } \cos \frac{5000\pi}{6} = \cos \frac{2500\pi}{3} = \cos \left(316 \frac{6\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} \right) = \cos \left(316 \times 2\pi + \frac{4\pi}{3} \right) = \cos \frac{4\pi}{3} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

4) On fait la division euclidienne de 1111 par 12 : on trouve $1111 = 12 \times 92 + 7$

$$\text{Ainsi } \sin \frac{1111\pi}{6} = \sin \left(92 \frac{12\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} \right) = \sin \left(92 \times 2\pi + \frac{7\pi}{6} \right) = \sin \frac{7\pi}{6} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

5) On fait la division euclidienne de 333 par 8 : on trouve $333 = 8 \times 41 + 5$

$$\text{Ainsi } \sin \frac{333\pi}{4} = \sin \left(41 \frac{8\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} \right) = \sin \left(41 \times 2\pi + \frac{5\pi}{4} \right) = \sin \frac{5\pi}{4} = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Exercice 3 : ★ Parmi ces valeurs lesquelles sont égales entre elles ? Justifier.

- 1) $\cos \frac{\pi}{12}$ 2) $\cos \frac{5\pi}{12}$ 3) $\cos \frac{13\pi}{12}$ 4) $-\cos \frac{\pi}{12}$ 5) $\sin \frac{5\pi}{12}$ 6) $\sin \frac{7\pi}{12}$
7) $\cos \frac{25\pi}{12}$ 8) $-\sin \frac{7\pi}{12}$ 9) $\cos \frac{11\pi}{12}$ 10) $\cos \frac{-\pi}{12}$ 11) $\sin \frac{-5\pi}{12}$ 12) $\sin \frac{11\pi}{12}$.
-

Réponses : Dans cet exercice il faut utiliser les formules de symétrie.

$$\text{On a } \boxed{\cos \frac{\pi}{12} = \sin \frac{5\pi}{12} = \sin \frac{7\pi}{12} = \cos \frac{25\pi}{12} = \cos \frac{-\pi}{12}}$$

$$\text{En effet : } \sin \frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \cos \frac{\pi}{12} \text{ et } \sin \frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = \cos \frac{\pi}{12}$$

$$\cos \frac{25\pi}{12} = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{12}\right) = \cos \frac{\pi}{12} \text{ et } \cos \frac{-\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{12}.$$

$$\boxed{\cos \frac{13\pi}{12} = -\cos \frac{\pi}{12} = \cos \frac{11\pi}{12}}$$

$$\text{En effet } \cos \frac{13\pi}{12} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right) = -\cos \frac{\pi}{12} \text{ et } \cos \frac{11\pi}{12} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) = -\cos \frac{\pi}{12}.$$

$$\boxed{-\sin \frac{7\pi}{12} = \sin \frac{-5\pi}{12}} \text{ En effet } \sin \frac{-5\pi}{12} = \sin\left(\pi - \frac{7\pi}{12}\right) = -\sin \frac{7\pi}{12}.$$

$$\boxed{\cos \frac{5\pi}{12} = \sin \frac{11\pi}{12}}. \text{ En effet, } \sin \frac{11\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{12}\right) = \cos \frac{5\pi}{12}$$

Exercice 4 : ★★ Soit a un nombre réel, Exprimer $\cos(3a)$ en fonction de $\cos a$.

.....

$$\begin{aligned} \cos(3a) = \cos(2a + a) &= \cos(2a) \cos a - \sin(2a) \sin a \\ &= (2 \cos^2 a - 1) \cos a - 2 \cos a \sin^2 a \\ &= 2 \cos^3 a - \cos a - 2 \cos a (1 - \cos^2 a) \\ &= 4 \cos^3 a - 3 \cos a \end{aligned}$$

$$\text{donc } \boxed{\cos(3a) = 4 \cos^3 a - 3 \cos a}$$

Exercice 5 : ★★ Soit a et b deux réels, Exprimer $\tan(a + b)$ en fonction de $\tan a$ et $\tan b$.

.....

L'idée est de faire apparaître tangente dans le calcul en utilisant : $\sin a = \tan a \cos a$ et $\sin b = \tan b \cos b$

$$\begin{aligned} \tan(a + b) &= \frac{\sin(a + b)}{\cos(a + b)} = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} \\ &= \frac{\tan a \cos a \cos b + \tan b \cos b \cos a}{\cos a \cos b - \tan a \cos a \tan b \cos b} \\ &= \frac{\cos a \cos b (\tan a + \tan b)}{\cos a \cos b (1 - \tan a \tan b)} \\ &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \end{aligned}$$

$$\text{donc } \boxed{\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}}$$

Exercice 6 : ★★★ Soit θ un réel, Exprimer $\cos \frac{\theta}{2}$ en fonction de $\cos \theta$.

.....

$$\text{On a } \cos \theta = \cos\left(2 \times \frac{\theta}{2}\right) = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1. \text{ Ainsi en isolant on trouve } \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\cos \theta + 1}{2}.$$

$$\text{Il y a donc deux solutions possibles. : } \cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{\cos \theta + 1}{2}} \text{ ou } \cos \frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{\cos \theta + 1}{2}}$$

Pour conclure, on va donc voir pour quelles valeurs de θ on a quelle solution.

On sait que : $\cos \frac{\theta}{2} \geq 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid \frac{\theta}{2} \in \left[\frac{-\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right]$
 $\iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid \theta \in [-\pi + 4k\pi, \pi + 4k\pi]$

Ainsi $\left\{ \begin{array}{l} \cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{\cos \theta + 1}{2}}, \text{ si } \exists k \in \mathbb{Z} \mid \theta \in [-\pi + 4k\pi, \pi + 4k\pi] \\ \cos \frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{\cos \theta + 1}{2}}, \text{ sinon} \end{array} \right.$
