

# TD 2 - Nombres $\mathbb{N}$ , $\mathbb{Z}$ , $\mathbb{Q}$ , $\mathbb{R}$

BCPST 1

Feuille d'exercice

Année 2022- 2023

## Nombres Entiers

**Exercice 1 :** (En 1 minute) Ecrire la décomposition en produit de facteur premiers des nombres suivants :

- 1) 123      2) 1000      3) 824      4) 1024      5) 133      6) 6615      7) 2310      8) 131

.....

Réponses : 1)  $123 = 3 \times 41$       2)  $1000 = 10^3 = 2^3 \times 5^3$       3)  $824 = 2 \cdot 412 = 2 \cdot 4 \cdot 103 = 2^3 \times 103$

4)  $1024 = 2^{10}$       5)  $133 = 7 \times 19$       6)  $6615 = 5 \cdot 1323 = 5 \cdot 9 \cdot 147 = 3^2 \times 5 \times 147$

7)  $2310 = 3 \times 10 \times 77 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$       8)  $131 = 131$  car 131 est premier.

## Equations

**Exercice 2 :** (En 1 minute) Résoudre les équations suivantes pour  $x \in \mathbb{R}$  :

- 1)  $x + 1 = 2x + 3$       2)  $x = \frac{1}{x}$       3) Si  $a \in \mathbb{R}$ ,  $3x + 1 = a$       4)  $\frac{x+2}{x-3} = 0$       5)  $\frac{x+5}{2x-1} = 2$

- 6)  $\frac{x^2-1}{x-1} = x + 1$       7) Pour  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{x+a}{2x+b} = 1$       8)  $x^2 = -1$       9)  $\sqrt{x+3} = 2$

- 10)  $\sqrt{1-x} = x$       11)  $|x| = x$       12)  $\ln(x+2) = 3$       13)  $\cos(x) = 0$       14)  $2 - \frac{1}{x} = x$

.....

Réponses : 1)  $x + 1 = 2x + 3 \iff x = -2 : S = \{-2\}$

2)  $x = \frac{1}{x} \iff x^2 = 1$  donc  $S = \{-1, 1\}$  (valeur interdite  $x = 0$  car on a du  $\frac{1}{x}$ )

3)  $3x + 1 = a \iff x = \frac{a-1}{3} : S = \left\{ \frac{a-1}{3} \right\}$       4)  $\frac{x+2}{x-3} = 0 \iff x+2 = 0 \iff x = -2 : S = \{-2\}$

5)  $\frac{x+5}{2x+1} = 2 \iff x+5 = 4x+2 \iff 3x = 3 \iff x = 1 : S = \{1\}$

6)  $\frac{x^2-1}{x-1} = x + 1 \iff x^2 - 1 = x^2 - 1$  vrai pour tout  $x$  donc  $S = \mathbb{R}$

7) Pour  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{x+a}{2x+b} = 1 \iff x+a = 2x+b \iff x = a-b$  Attention valeur interdite :  $x = \frac{-b}{2}$  Donc si  $a-b = \frac{-b}{2}$  ça ne marche pas.  $a-b = \frac{-b}{2} \iff 2a-2b = -b \iff b = 2a$ .

Conclusion :  $S = \begin{cases} \emptyset & \text{si } b = 2a \\ \{a-b\} & \text{sinon} \end{cases}$  En effet si  $b = 2a$  alors  $\frac{x+a}{2x+b} = \frac{x+a}{2x+2a} = \frac{1}{2} \neq 1$  pour tout  $x$ .

8)  $x^2 = -1$  Pas de solution réelle.  $S = \emptyset$

9)  $\sqrt{x+3} = 2$  Condition :  $x \geq -3$ . On a alors  $\sqrt{x+3} = 2 \iff x+3 = 4 \iff x = 1$  Cela vérifie la condition donc  $S = \{1\}$

10)  $\sqrt{1-x} = x$  Condition  $1-x \geq 0 \iff 1 \geq x$  et  $x \geq 0$  car  $\sqrt{\phantom{x}}$  est positif. Donc  $x \in [0, 1]$ .

On continue :  $\sqrt{1-x} = x \iff 1-x = x^2 \iff x^2 + x - 1 = 0$  On a  $\Delta = 5$  Donc  $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$  et

$x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ . On a  $x_1 \in [0, 1]$  et  $x_2 \notin [0, 1]$  donc seul  $x_1$  respecte la condition.  $S = \left\{ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right\}$

11)  $|x| = x$  Si  $x \leq 0$  on a  $|x| = -x$  qui est vérifié, sinon  $x > 0$  et  $|x| = x \iff 2x = 0 \iff x = 0$  Donc l'équation est vérifiée uniquement pas les  $x$  positifs ou nuls. on trouve  $S = \mathbb{R}_+$ .

12)  $\ln(x+2) = 3$  La condition est  $x > -2$ . On a  $\ln(x+2) = 3 \iff x+2 = e^3 \iff x = e^3 - 2$  donc

$$\boxed{S = \{e^3 - 2\}} \quad \mathbf{13)} \cos(x) = 0. \text{ C'est du cours : } \boxed{S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}}$$

**14)**  $2 - \frac{1}{x} = x$ . On veut  $x \neq 0$ . On a :

$$2 - \frac{1}{x} = x = 0 \iff 2x - 1 = x^2 \iff x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x - 1)^2 = 0 \iff x = 1 \text{ Donc } \boxed{S = \{1\}}$$

**Exercice 3 :** (En 1 minute) Résoudre les équations de degré 2 suivantes et factoriser les expressions quand cela est possible :

- 1)**  $x^2 + 2x + 1 = 0$       **2)**  $x^2 + 1 = 0$       **3)**  $x^2 + 3x + 2 = 0$       **4)**  $x^2 - 5x + 6 = 0$       **5)**  $x^2 - 9 = 0$   
**6)**  $2x^2 - 4x + 2 = 0$       **7)**  $(x + 3)(x - 1) = 0$       **8)**  $(x + 2)^2 + 1 = 0$       **9)**  $(x - 5)^2 - 16 = 0$   
**10)**  $x^2 + x + 1 = 0$       **11)**  $9x - 9x - 18 = 0$       **12)**  $x^2 + 2x + 5 = 2$       **13)**  $x^2 + 5x + 3 = x^2 + 9x + 2$   
 .....

Remarque : les réponses se font par calcul de  $\Delta$  ou en remarquant des identités remarquables, ici je mets directement les solutions sous forme factorisée.

Réponses : **1)**  $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 = 0 \iff \boxed{x = 0}$

**2)**  $x^2 + 1 = 0 \iff x^2 = -1$  pas de solution car  $x^2 \geq 0$

**3)**  $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2) = 0 \iff \boxed{x = -1 \text{ ou } x = -2}$

**4)**  $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2) = 0 \iff \boxed{x = 2 \text{ ou } x = 3}$

**5)**  $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3) = 0 \iff \boxed{x = 3 \text{ ou } x = -3}$

**6)**  $2x^2 - 4x + 2 = 2(x^2 - 2x + 1) = 2(x - 1)^2 \iff \boxed{x = 1}$

**7)** Celui là est déjà factorisé.  $(x + 3)(x - 1) = 0 \iff \boxed{x = -3 \text{ ou } x = 1}$

**8)**  $(x + 2)^2 + 1 = 0 \iff (x + 2)^2 = -1$  pas de solution car  $(x + 2)^2 \geq 0$

**9)**  $(x - 5)^2 - 16 = (x - 5 + 4)(x - 5 - 4) = (x - 1)(x - 9) = 0 \iff \boxed{x = 1 \text{ ou } x = 9}$

**10)**  $x^2 + x + 1 = 0$  On a  $\Delta = 1 - 4 = -3$  donc pas de solution

**11)**  $9x - 9x - 18 = 9(x^2 - x - 2) = 9(x + 1)(x - 2) \iff \boxed{x = -1 \text{ ou } x = 2}$

**12)**  $x^2 + 2x + 5 = 2 \iff x^2 + 2x + 3 = 0 \iff (x + 1)(x + 2) = 0 \iff \boxed{x = -1 \text{ ou } x = -2}$

**13)**  $x^2 + 5x + 3 = x^2 + 9x + 2 \iff 4x - 1 = 0 \iff \boxed{x = \frac{1}{4}}$  (on ne peut pas factoriser l'expression  $4x - 1$ )

**Exercice 4 :** (Avec des valeurs absolues) Résoudre les équations suivantes :

- 1)**  $|x|x = 3x + 2$       **2)**  $|x + 2| + |3x - 1| = 4$       **3)**  $|x^2 + x + 3| = |x|$       **4)**  $x + |x| = \frac{x}{2}$   
**5)** Pour  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $|x - a| = |x - b|$   
 .....

Réponses : **1)** On distingue selon le signe de  $x$ .

Si  $x \geq 0$  Alors  $|x|x = 3x + 2 \iff x^2 - 3x - 2 = 0$ . On a  $\Delta = 9 + 8 = 17$  donc  $x_1 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$  et  $x_2 = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}$ .

On a  $x_2 < 0$  donc seul  $x_1$  est valable.

Si  $x < 0$  On a  $|x|x = 3x + 2 \iff x^2 + 3x + 2 = 0 \iff (x + 1)(x + 2) = 0$  Donc  $x_1 = -1$  ou  $x_2 = -2$  sont les deux solutions valables qui vérifient bien  $x_1 < 0$  et  $x_2 < 0$ .

Finalement  $\boxed{S = \left\{ -1, -2, \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \right\}}$

**2)** On distingue selon les signes de  $x + 2$  et  $3x - 1$  :

| $x$      | $-\infty$ | $-2$ | $\frac{1}{3}$ | $+\infty$ |
|----------|-----------|------|---------------|-----------|
| $x + 2$  |           | $-$  | $+$           | $+$       |
| $3x - 1$ |           | $-$  | $-$           | $0$       |

★ Si  $x \in ]-\infty, -2]$  alors  $|x + 2| + |3x - 1| = 4 \iff -x - 2 - 3x + 1 = 4 \iff -4x = 5 \iff x = \frac{-5}{4}$  C'est contradictoire avec  $x \leq -2$  Donc pas de solution.

★ Si  $x \in \left] -2, \frac{1}{3} \right]$  alors  $|x + 2| + |3x - 1| = 4 \iff x + 2 - 3x + 1 = 4 \iff -2x = 1 \iff x = \frac{-1}{2}$  On a

bien  $\frac{-1}{2} \in \left] -2, \frac{1}{3} \right]$  donc c'est une solution valable.

★ Si  $x \in \left] \frac{1}{3}, +\infty \right[$  alors  $|x+2| + |3x-1| = 4 \iff x+2+3x-1 = 4 \iff 4x = 3 \iff x = \frac{3}{4}$  On a bien  $\frac{3}{4} \leq \frac{1}{3}$  donc la solution est valable.

En conclusion on trouve  $S = \left\{ \frac{-1}{2}, \frac{3}{4} \right\}$

3)  $|x^2 + x + 3| = |x|$  Pour le signe de  $x^2 + x + 3$  on calcule :  $\Delta = 1 - 12 = -11$ . Le signe est donc constant positif car le coefficient devant  $x^2$  est 1. On a donc  $x^2 + x + 3 \geq 0$  pour tout  $x$ . Reste à distinguer selon le signe de  $x$ .

★  $x \geq 0$  : alors  $|x^2 + x + 3| = |x| \iff x^2 + x + 3 = x \iff x^2 = -3$ . Pas de solution.

★  $x < 0$  : alors  $|x^2 + x + 3| = |x| \iff x^2 + 2x + 3 = 0 \iff (x+1)(x+2) = 0 \iff x = -1$  ou  $x = -2$ .

En conclusion  $S = \{-2, -1\}$ .

4)  $x + |x| = \frac{x}{2}$ . Comme d'hab on peut distinguer selon le signe de  $x$  mais ici il y a plus simple.

On a  $x + |x| = \frac{x}{2} \iff |x| = \frac{-x}{2}$  Donc en valeur absolue cela donne :  $|x| = \left| \frac{-x}{2} \right| = \frac{|x|}{2} \iff \frac{|x|}{2} = 0 \iff$

$|x| = 0$  donc  $x = 0$  Donc  $S = \{0\}$ .

5) On doit distinguer suivant les signes de  $x-a$  et  $x-b$ . Déjà si  $a = b$  c'est vrai pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Supposons

| $x$   | $-\infty$ | $a$ | $b$ | $+\infty$ |
|-------|-----------|-----|-----|-----------|
| $x-a$ |           | -   | 0   | +         |
| $x-b$ |           | -   | -   | 0         |

donc dans la suite que  $a \neq b$ . On suppose que  $a < b$ .

★ Si  $x \in ]-\infty, a]$  On a  $|x-a| = |x-b| \iff -x+a = -x+b \iff a = b$  Impossible, donc pas de solution.

★ Si  $x \in ]a, b]$  On a  $|x-a| = |x-b| \iff x-a = -x+b \iff 2x = a+b \iff x = \frac{a+b}{2}$  On a bien  $\frac{a+b}{2} \in ]a, b]$  car  $a = \frac{a+a}{2} < \frac{a+b}{2} < \frac{b+b}{2} = b$  En fait c'est le milieu.

★ Si  $x \in ]-\infty, a]$  On a  $|x-a| = |x-b| \iff x-a = x-b \iff -a = -b$  Impossible, donc pas de solution.

Si  $b < a$  on aurait exactement le même résultat par symétrie : Conclusion

$$S = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } a = b \\ \left\{ \frac{a+b}{2} \right\} & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque : c'est logique que la solution soit le milieu. Concrètement on cherche à trouver  $x$  qui soit à la même distance de  $a$  que de  $b$ . Cela revient à chercher le nombre au milieu de  $a$  et  $b$ .

**Exercice 5 :** (Avec des fonctions usuelles) Résoudre les équations suivantes :

1)  $\ln((x+2)(x-1)) = \ln 2$       2)  $x + \sqrt{2x+1} = 1$

Réponses : 1)  $\ln((x+2)(x-1)) = \ln 2$  est valide à condition d'avoir  $(x+2)(x-1) > 0$  c'est à dire  $x \in ]-\infty, -2[ \cup ]1, +\infty[$ .

On a ensuite,  $\ln((x+2)(x-1)) = \ln 2 \iff (x+2)(x-1) = 2 \iff x^2 + x - 2 = 2 \iff x^2 + x - 4 = 0$ . Donc

$\Delta = 1 + 16 = 17$ . On a  $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$  et  $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$  On a  $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < \frac{-1 - 4}{2} = \frac{-5}{2} < -2$  et

$x_2 > \frac{-1 + 4}{2} = \frac{3}{2} > 1$ . Donc  $x_1, x_2 \in ]-\infty, -2[ \cup ]1, +\infty[$  et Donc  $S = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \right\}$

2)  $x + \sqrt{2x+1} = 1$  est valide à condition d'avoir  $2x+1 > 0$  c'est à dire  $x > \frac{-1}{2}$ .

A cette condition, on peut faire l'analyse :

$x + \sqrt{2x+1} = 1 \implies 2x+1 = (1-x)^2 = 1-2x+x^2 \iff x^2-4x = 0 \iff x(x-4) = 0 \iff x = 0$  ou  $x = 4$ .

On a bien 0 et 4 qui vérifient la condition  $x > \frac{-1}{2}$ , MAIS ce ne sont pas forcément des solutions car on n'a pas

que des équivalences dans notre raisonnement ! Il faut faire une synthèse pour vérifier. On a  $0 + \sqrt{2 \cdot 0 + 1} = 1$

Ok Par contre  $4 + \sqrt{2 \cdot 4 + 1} = 4 + \sqrt{9} = 7 \neq 1$  donc 4 n'est pas solution !! On trouve  $S = \{0\}$

## Inéquations

**Exercice 6 :** (Valeurs absolues) Compléter le tableau suivant :

|                                   |                            |                                          |
|-----------------------------------|----------------------------|------------------------------------------|
| $ x - 3  < 1$                     | $2 < x < 4$                | $x \in ]2, 4[$                           |
| $ x + 2  \geq 10$                 | $x \leq -12$ ou $x \geq 8$ | $x \in ]-\infty, -12] \cup [8, +\infty[$ |
| $ x - 5  \leq 3$                  | $2 \leq x \leq 8$          | $x \in [2, 8]$                           |
| $ x - 2  > 2$                     | $x < 0$ ou $x > 4$         | $x \in ]-\infty, 0[ \cup ]4, +\infty[$   |
| $ x + 3  \leq 5$                  | $-8 \leq x \leq 2$         | $x \in [-8, 2]$                          |
| $ x - 9  < 1$                     | $8 < x < 10$               | $x \in ]8, 10[$                          |
| $ x - \frac{7}{2}  > \frac{3}{2}$ | $x < 2$ ou $x > 5$         | $x \in ]-\infty, 2[ \cup ]5, +\infty[$   |

**Exercice 7 :** (En 1 minute) Résoudre les inéquations suivantes et représenter graphiquement l'ensemble des solutions :

- 1)  $2x + 2 > 0$       2)  $\frac{1}{x+1} \geq 2$       3)  $x^2 \leq 12$       4)  $x^2 - 1 > 0$       5)  $(x+5)(x+2)(x-1) \leq 0$   
 6)  $\frac{x+2}{x+3} \geq 0$

Réponses : 1)  $2x + 2 > 0 \iff x > -1$ ,  $S = ]-1, +\infty[$

2)  $\frac{1}{x+1} \geq 2 \iff 0 < x+1 \leq \frac{1}{2} \iff -1 < x \leq -\frac{1}{2}$  Donc  $S = ]-1, -\frac{1}{2}]$

3)  $x^2 \leq 5 \iff \sqrt{x^2} \leq 5 \iff |x| \leq \sqrt{5}$  Donc  $S = [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$

4)  $x^2 - 1 > 0 \iff x^2 > 1 \iff x > 1$  ou  $x < -1$  Donc  $S = ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$

5)  $(x+5)(x+2)(x-1) \leq 0$  Il faut faire un tableau de signe :

| $x$   | $-\infty$ | $-5$ | $-2$ | $1$ | $+\infty$ |
|-------|-----------|------|------|-----|-----------|
| $x+5$ |           | $-$  | $0$  | $+$ | $+$       |
| $x+2$ |           | $-$  | $-$  | $0$ | $+$       |
| $x-1$ |           | $-$  | $-$  | $-$ | $0$       |

On trouve donc  $S = ]-\infty, -5] \cup [-2, 1]$

6)  $\frac{x+2}{x+3} \geq 0$ . On a  $-3$  valeur interdite car sinon  $x+3 = 0$  déjà. Ensuite on veut avoir  $x+2$  et  $x+3$  du même signe. On pourrait encore faire un tableau de signe, mais on va commencer à faire ça de tête. on trouve :  $S = ]-\infty, -3[ \cup [2, +\infty[$ .

**Exercice 8 :** (Avec des constantes) Résoudre les inéquations suivantes :

- 1) Si  $a \in \mathbb{R}$ , Résoudre  $ax > 0$       2) Si  $\alpha \in \mathbb{R}$ , Résoudre  $\sqrt{x+\alpha} > \alpha$   
 3) Si  $\omega \in \mathbb{R}^*$ , Résoudre  $xw > \frac{x}{w}$

1) Si  $a \in \mathbb{R}$ , Résoudre  $ax > 0$ . Cela dépend de  $a$  :

$$S = \begin{cases} \emptyset & \text{si } a = 0 \\ \mathbb{R}_+^* & \text{si } a > 0 \\ \mathbb{R}_-^* & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

2) Pour que  $\sqrt{x+\alpha}$  soit défini il faut que  $x \geq -\alpha$ .

On a par ailleurs si  $\alpha < 0$ ,  $\sqrt{x+\alpha} > \alpha$  est vrai car  $\sqrt{x+\alpha} \geq 0 > \alpha$ . Donc pour vérifier l'équation, il suffit d'avoir  $x \geq -\alpha$ .

Si  $\alpha \geq 0$ ,  $\sqrt{x+\alpha} > \alpha \implies x + \alpha > \alpha^2$  Donc  $x > \alpha(\alpha - 1)$  Vérifions juste dans quel cas cela valide la condition  $x > -\alpha$  : On a  $\alpha(\alpha - 1) \geq -\alpha \iff \alpha^2 \geq 0$  C'est vrai pour tout  $\alpha > 0$ , Donc

$$S = \begin{cases} ]\alpha(\alpha - 1), +\infty[ & \text{si } \alpha \geq 0 \\ [-\alpha, +\infty[ & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

**3)**  $xw > \frac{x}{w} \iff x\left(w - \frac{1}{w}\right) > 0$ . Le résultat dépend donc du signe de  $w - \frac{1}{w}$  comme la question 7).

Regardons déjà quand il s'annule :  $w - \frac{1}{w} = 0 \iff w^2 = 1 \iff w = \pm 1$ .

Enfin, étudions son signe :

$$w - \frac{1}{w} > 0 \iff w > \frac{1}{w} \iff \begin{cases} w^2 > 1 \text{ si } w > 0 \\ w^2 < 1 \text{ si } w < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} w \in ]1, +\infty[ \\ w \in ]-1, 0[ \end{cases} \iff w \in ]-1, 0[ \cup ]1, +\infty[$$

Finalement,  $S = \begin{cases} \emptyset & \text{si } w \in \{-1, 1\} \\ \mathbb{R}_+^* & \text{si } w \in ]-1, 0[ \cup ]1, +\infty[ \\ \mathbb{R}_-^* & \text{si } w \in ]-\infty, -1[ \cup ]0, 1[ \end{cases}$  en utilisant le même raisonnement que la question 1).

**Exercice 9 :** (Polynômes de degré 2) Résoudre les inéquations suivantes et représenter graphiquement l'ensemble des solutions :

- 1)  $x^2 + 3x + 2 \leq 0$       2)  $x^2 + 2x - 1 < 2x^2 + 3x + 1$       3)  $x^2 - 5x + 8 \leq -x^2 + 3x$   
 4)  $x^2 + 4x - 5 < 4x + 7$       5)  $(x^2 + 9x + 18)(-x^2 + 2x + 6) > 0$       6)  $\frac{4 - x^2}{3x^2 + 6x - 45} \geq 0$

Réponses : 1)  $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2) \leq 0$  donc  $S = [-3, -2]$ .

2)  $x^2 + 2x - 1 < 2x^2 + 3x + 1 \iff 0 < x^2 + x + 2$  On a  $\Delta = 1 - 8 = -7$  et le coefficient dominant est  $1 > 0$ . Donc C'est toujours positif strictement on a  $S = \mathbb{R}$

3)  $x^2 - 5x + 8 \leq -x^2 + 3x \iff 2x^2 + 8x + 8 \leq 0 \iff 2(x - 2)^2 \leq 0$ . La seule possibilité est  $x = 2$  on a alors  $2(x - 2)^2 = 0$  Donc  $S = \{2\}$

4)  $x^2 + 4x - 5 < 4x + 7 \iff x^2 < 12$  Donc ce problème se résout plus facilement avec une racine carrée :  $x^2 < 12 \iff \sqrt{x^2} < \sqrt{12} \iff |x| < 2\sqrt{3}$ . Donc  $S = ]-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}[$

5) On a  $x^2 + 9x + 18 = (x + 3)(x + 6)$  et pour  $-x^2 + 2x + 6$  on a  $\Delta = 4 + 24 = 28$ .

Donc  $x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{7}}{2} = 1 - \sqrt{7}$  et  $x_2 = 1 + \sqrt{7}$ .

On a  $(x^2 + 9x + 18)(-x^2 + 2x + 6) > 0 \iff (x + 6)(x + 3)(x - 1 - \sqrt{7})(x - 1 + \sqrt{7}) > 0$  On a rangé les racines dans l'ordre croissant à savoir  $-6, -3, 1 - \sqrt{7}, 1 + \sqrt{7}$ . Finalement  $S = ]-\infty, -6[ \cup ]-3, 1 - \sqrt{7}[ \cup ]1 + \sqrt{7}, +\infty[$

6) On a directement  $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ . Par ailleurs  $3x^2 + 6x - 45 = 3(x^2 + 2x - 15) = 3(x + 3)(x - 5)$ . Donc :

$\frac{4 - x^2}{3x^2 + 6x - 45} \geq 0 \iff \frac{-(x - 2)(x + 2)}{3(x + 3)(x - 5)} \geq 0$ . N'oublions pas que  $-3$  et  $5$  sont des valeurs interdites car elles annulent le dénominateur. On a  $S = ]-3, -2] \cup [2, 5[$

**Exercice 10 :** Résoudre les inéquations suivantes :

- 1)  $x^2 + 4 > 2x + 1$       2)  $\sqrt{x^2 - 4x + 1} > 2x$       3)  $x^2 \leq |2x - 1|$       4)  $|x + 4| > |x - 1|$   
 5) Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ , Résoudre  $\sqrt{x^2 + \alpha x} \geq \alpha$       6) Pour  $n, m \in \mathbb{N}$ , Résoudre  $x^m > x^n$   
 7) Si  $a \in \mathbb{R}$ , Résoudre  $\lfloor x \rfloor < a$

1)  $x^2 + 4 > 2x + 1 \iff x^2 - 2x + 3 > 0 \iff (x - 1)(x + 3) > 0$  Donc  $S = ]-\infty, -3[ \cup ]1, +\infty[$ .

2)  $\sqrt{x^2 - 4x + 1} > 2x$ . On regarde pour quels  $x$  on a la racine carrée qui est définie :  $x^2 - 4x + 1 \geq 0$  se résout avec  $\Delta = 16 - 4 = 12$  Donc  $x_1 = 2 - \sqrt{3}$  et  $x_2 = 2 + \sqrt{3}$  et l'équation est bien définie si  $x \in ]-\infty, 2 - \sqrt{3}] \cup [2 + \sqrt{3}, +\infty[$  (★).

On remarque maintenant qu'il sera pratique de faire une disjonction de cas selon le signe de  $x$  :

Si  $x < 0$  : On a  $\sqrt{x^2 - 4x + 1} \geq 0 > 2x$  est vérifié à condition que la racine carrée soit bien définie. Or si  $x < 0$  alors  $x \in ]-\infty, 2 - \sqrt{3}[$ , donc la racine carrée est bien définie d'après (★). L'équation est donc vérifiée pour tout  $x < 0$ .

Si  $x \geq 0$  Alors on a  $\sqrt{x^2 - 4x + 1} > 2x \iff x^2 - 4x + 1 > 4x^2 \iff 0 > 3x^2 + 4x - 1$ . On a cette fois  $\Delta = 28$  et  $x_1 = \frac{-2 - \sqrt{7}}{3}$  et  $x_2 = \frac{-2 + \sqrt{7}}{3}$ . L'équation est vérifiée pour  $x \in \left] \frac{-2 - \sqrt{7}}{3}, \frac{-2 + \sqrt{7}}{3} \right[$ .

Comme on a  $x \geq 0$ , cela revient à dire  $x \in \left[0, \frac{2+\sqrt{7}}{3}\right]$ . Il faut encore vérifier qu'on est bien dans les hypothèses. On peut vérifier à la calculatrice ou prouver que  $\frac{2+\sqrt{7}}{3} < 2 + \sqrt{3}$ . Dès lors,  $x \in \left[0, \frac{2+\sqrt{7}}{3}\right] \Rightarrow x \in ]-\infty, 2 - \sqrt{3}]$  et donc d'après (★), l'équation est vérifiée pour tout  $x \in \left[0, \frac{2+\sqrt{7}}{3}\right]$ .

Finalement, si on récapitule  $S = \left] -\infty, \frac{2+\sqrt{7}}{3} \right]$ .

Remarque : Si on souhaite prouver  $\frac{-2+\sqrt{7}}{3} < 2 - \sqrt{3}$  à la main, on écrit :

$$\frac{-2+\sqrt{7}}{3} < 2 - \sqrt{3} \iff -2 + \sqrt{7} < 6 - 3\sqrt{3} \iff \sqrt{7} < 8 - 3\sqrt{3} \iff 7 < (8 - 3\sqrt{3})^2 = 64 - 48\sqrt{3} + 27 = 91 - 48\sqrt{3} \iff 48\sqrt{3} < 84 \iff 24\sqrt{3} < 41 \iff 3 \times 24^2 < 42^2 \iff 1702 < 1764. \text{ C'est donc vrai mais fastidieux à prouver...}$$

**3)**  $x^2 \leq |2x - 1|$ . On fait une disjonction de cas suivant le signe de  $2x - 1$  :

On a  $2x - 1 > 0 \iff x > \frac{1}{2}$ . Donc faisons les deux cas :

(\*) Si  $x > \frac{1}{2}$  : alors, on a  $|2x - 1| = 2x - 1$  donc

$$x^2 \leq 2x - 1 \iff x^2 - 2x + 1 \leq 0 \iff (x - 1)^2 \leq 0 \text{ Cela est vrai uniquement si } x - 1 = 0 \text{ c'est à dire } x = 1. \text{ On a bien } 1 > \frac{1}{2}$$

(\*) Si  $x \leq \frac{1}{2}$  : alors on a  $|2x - 1| = -2x + 1$  donc

$$x^2 \leq -2x + 1 \iff x^2 + 2x - 1 \leq 0 \text{ On a } \Delta = 8 \text{ et } x_1 = -1 - \sqrt{2} \text{ et } x_2 = -1 + \sqrt{2}. \text{ Donc on veut } x \in [-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}] \text{ Or, on a } -1 + \sqrt{2} < \frac{1}{2} \text{ Donc si } x \in [-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}] \text{ on est bien dans le cas où } x \leq \frac{1}{2}. \text{ Ce sont donc toutes des solutions.}$$

Finalement, si on récapitule  $S = [-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}] \cup \{1\}$ .

**4)**  $|x + 4| > |x - 1|$ . On doit distinguer selon les signes de  $x + 4$  et  $x + 1$ .

On a  $x + 1 > 0 \iff x > -1$  et  $x + 4 > 0 \iff x > -4$ . Faisons donc 3 cas :

(\*) Si  $x > -1$  alors on a  $|x + 4| = x + 4$  et  $|x + 1| = x + 1$ . Donc

$$|x + 4| > |x - 1| \iff x + 4 > x + 1 \iff 4 > 1 \text{ c'est vrai. Donc l'inégalité est vraie pour tout } x > -1.$$

(\*) Si  $-4 \leq x \leq -1$  alors on a  $|x + 4| = x + 4$  et  $|x + 1| = -x - 1$ . Donc

$$|x + 4| > |x - 1| \iff x + 4 > -x - 1 \iff 2x > -5 \iff x > \frac{-5}{2}$$

Donc l'inégalité est vraie pour tout  $x \in \left] \frac{-5}{2}, -1 \right]$ .

(\*) Si  $x < -4$  alors on a  $|x + 4| = -x - 4$  et  $|x + 1| = x + 1$ . Donc

$$|x + 4| > |x - 1| \iff -x - 4 > -x - 1 \iff -4 > -1 \text{ c'est faux. Donc l'inégalité est fautive pour tout } x < -4.$$

Finalement,  $S = \left[ \frac{-5}{2}, +\infty \right[$ .

**5)** Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ , Résoudre  $\sqrt{x^2 + \alpha x} \geq \alpha$

La racine est définie à condition d'avoir  $x^2 + \alpha x \geq 0 \iff x(x + \alpha) \geq 0$ .

C'est à dire si  $\alpha < 0$ ,  $x \in ]-\infty, 0] \cup [-\alpha, +\infty[$  et si  $\alpha > 0$ ,  $x \in ]-\infty, -\alpha] \cup [0, +\infty[$

Remarque : une formule qui permet de ne pas faire la distinction du signe de  $\alpha$  serait :  $x \in ]-\infty, \min(0, -\alpha)] \cup [\max(0, -\alpha), +\infty[$ . Mais de toute façon, on doit faire une disjonction de cas selon le signe de  $\alpha$  :

(\*) Si  $\alpha \leq 0$  alors on a  $\sqrt{x^2 + \alpha x} \geq \alpha$  est toujours vrai car  $\sqrt{x^2 + \alpha x} \geq 0 \geq \alpha$ . Il faut quand même que la racine soit définie. donc les solutions sont  $x \in ]-\infty, 0] \cup [-\alpha, +\infty[$ .

(\*) Si  $\alpha > 0$  On résout :  $\sqrt{x^2 + \alpha x} \geq \alpha \iff x^2 + \alpha x - \alpha^2 \geq 0$ .

On a  $\Delta = \alpha^2 + 4\alpha^2 = 5\alpha^2$  donc  $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\alpha$  et  $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\alpha$  Donc l'équation est vérifiée si

$$x \in \left] -\infty, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\alpha \right] \cup \left[ \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\alpha, +\infty \right[$$

Reste à vérifier que ces solutions vérifient bien la condition du départ, à savoir  $x \in ]-\infty, -\alpha[ \cup ]0, +\infty[$ .

En fait oui, parce que  $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\alpha < -\alpha$  et  $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\alpha > 0$ . On a donc pour récapituler :

$$S = \begin{cases} ]-\infty, 0] \cup [-\alpha, +\infty[ & \text{si } \alpha \leq 0 \\ \left] -\infty, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\alpha \right] \cup \left[ \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\alpha, +\infty \right[ & \text{si } \alpha > 0 \end{cases}$$

**6)** Pour  $n, m \in \mathbb{N}$ , Résoudre  $x^m > x^n$ . Cet exercice est pénible, ne le faites qu'en cas d'extrême motivation.

On va distinguer selon les valeurs de  $x$  :

(\*) Si  $x > 1$  : alors on sait que  $x^m > x^n \iff m > n$ .

(\*) Si  $0 < x < 1$  : alors on sait que  $x^m > x^n \iff m < n$ .

(\*) Si  $x = 1$  ou  $x = 0$  : alors on n'a pas  $x^m > x^n$ .

(\*) Si  $-1 < x < 0$  : Ça devient l'enfer. On doit distinguer selon la parité des  $n$  et  $m$  :

. (\*\*) Si  $n$  et  $m$  pairs :  $x^m > x^n \iff m < n$

. (\*\*) Si  $n$  et  $m$  impairs :  $x^m > x^n \iff m > n$

. (\*\*) Si  $n$  pair et  $m$  impair :  $x^m > x^n$  est faux car  $x^m < 0$  et  $x^n > 0$

. (\*\*) Si  $n$  impair et  $m$  pair :  $x^m > x^n$  est vrai car  $x^m > 0$  et  $x^n < 0$

(\*) Si  $x < -1$  : Pareil, on doit distinguer selon la parité des  $n$  et  $m$  :

. (\*\*) Si  $n$  et  $m$  pairs :  $x^m > x^n \iff m > n$

. (\*\*) Si  $n$  et  $m$  impairs :  $x^m > x^n \iff m < n$

. (\*\*) Si  $n$  pair et  $m$  impair :  $x^m > x^n$  est faux car  $x^m < 0$  et  $x^n > 0$

. (\*\*) Si  $n$  impair et  $m$  pair :  $x^m > x^n$  est vrai car  $x^m > 0$  et  $x^n < 0$

(\*) Si  $x = -1$  : Pareil, on doit distinguer selon la parité des  $n$  et  $m$  :

. (\*\*) Si  $n$  et  $m$  ont la même parité : C'est faux.

. (\*\*) Si  $n$  pair et  $m$  impair :  $x^m > x^n$  est faux car  $x^m < 0$  et  $x^n > 0$

. (\*\*) Si  $n$  impair et  $m$  pair :  $x^m > x^n$  est vrai car  $x^m > 0$  et  $x^n < 0$

On est heureux de récapituler tout ça dans un tableau selon les valeurs de  $n$  et de  $m$  cela fait neuf ou dix cas en tout à distinguer :

| Solutions | $n$ et $m$ pairs                   | $n$ et $m$ impairs           | $n$ pair et $m$ impair | $n$ impair et $m$ pair            |
|-----------|------------------------------------|------------------------------|------------------------|-----------------------------------|
| $m > n$   | $] -\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$ | $] -1, 0[ \cup ]1, +\infty[$ | $]1, +\infty[$         | $] -\infty, 0[ \cup ]1, +\infty[$ |
| $m = n$   | $\emptyset$                        | $\emptyset$                  | $/$                    | $/$                               |
| $m < n$   | $] -1, 0[ \cup ]0, 1[$             | $] -\infty, -1[ \cup ]0, 1[$ | $]0, 1[$               | $] -\infty, 0[ \cup ]0, 1[$       |

**7)** Si  $a \in \mathbb{R}$ , Résoudre  $\lfloor x \rfloor < a$ . On va d'abord traiter le cas plus facile où  $a \in \mathbb{Z}$  :

(\*) Si  $a \in \mathbb{Z}$  alors on va montrer que  $\lfloor x \rfloor < a \iff x < a$  :

$\Leftarrow$  on a  $x < a \implies \lfloor x \rfloor < a$  car  $\lfloor x \rfloor \leq x$ . Donc c'est vérifié pour tous les  $x$  tels que  $x < a$ .

$\Rightarrow$  ] par contraposée, si  $x \geq a$  lors  $\lfloor x \rfloor \geq a$  car  $\lfloor x \rfloor$  est le plus grand entier inférieur à  $x$ , donc  $x$  ne vérifie pas l'équation.

(\*) Si  $a \notin \mathbb{Z}$  alors on va montrer que  $\lfloor x \rfloor < a \iff x < \lfloor a \rfloor + 1$  :

$\Leftarrow$  on a  $x < \lfloor a \rfloor + 1 \implies \lfloor x \rfloor < \lfloor a \rfloor + 1 \implies \lfloor x \rfloor \leq \lfloor a \rfloor < a$  (car  $a \notin \mathbb{Z} \implies \lfloor a \rfloor < a$ )

donc  $\lfloor x \rfloor < a$  est vérifié.

$\Rightarrow$  ] Par contraposée, si  $x \geq \lfloor a \rfloor + 1$  alors  $\lfloor x \rfloor \geq \lfloor a \rfloor + 1$  car  $\lfloor x \rfloor$  est le plus grand entier inférieur à  $x$ , donc  $x$  ne vérifie pas l'équation.

Conclusion : 
$$S = \begin{cases} ]-\infty, a[ & \text{si } a \in \mathbb{Z} \\ ]-\infty, \lfloor a \rfloor + 1[ & \text{si } a \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

---

## Partie entière

**Exercice 11 :** (*En 1 minute*) Calculer les parties entières suivantes :

1)  $\lfloor 12 \rfloor$     2)  $\lfloor -11 \rfloor$     3)  $\lfloor 0,5 \rfloor$     4)  $\lfloor -8,6 \rfloor$     5)  $\lfloor 75,98 \rfloor$     6)  $\left\lfloor \frac{8}{3} \right\rfloor$     7)  $\lfloor \pi \rfloor$     8)  $\lfloor -\sqrt{2} \rfloor$   
.....  
Réponses : 1) 12    2) -11    3) 0    4) -9    5) 75    6) 2    7) 3    8) -2

---

**Exercice 12 :** (*Partie entière de l'opposé*)  $\forall x \in \mathbb{R}$ , montrer que  $-\lfloor x \rfloor - 1 \leq \lfloor -x \rfloor \leq -\lfloor x \rfloor$ . Dans quels cas a-t-on  $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor$  ?

.....  
Réponse : On a  $-(\lfloor x \rfloor + 1) - 1 < -x - 1 < \lfloor -x \rfloor \leq -x \leq -\lfloor x \rfloor$ . Donc  $-\lfloor x \rfloor - 2 < \lfloor -x \rfloor \leq -\lfloor x \rfloor$ . L'inégalité de gauche est stricte, mais comme il s'agit de nombre entier, on peut la préciser avec une inégalité large : on trouve  $-\lfloor x \rfloor - 1 \leq \lfloor -x \rfloor \leq -\lfloor x \rfloor$

On a  $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor \iff \lfloor -x \rfloor = -x = -\lfloor x \rfloor$  car on a  $\lfloor -x \rfloor \leq -x \leq -\lfloor x \rfloor$  d'après ce qu'on a écrit au

dessus. Il faut donc avoir  $\lfloor x \rfloor = x$  c'est à dire  $x \in \mathbb{Z}$ . On a donc

$$\lfloor -x \rfloor = \begin{cases} -\lfloor x \rfloor & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -\lfloor x \rfloor - 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

---

**Exercice 13 :** (*Partie entière de la somme*) Démontrer que  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ,  $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$ . Combien y a-t-il de valeurs possibles pour  $\lfloor x + y \rfloor$  ?

.....  
Réponse : On a  $x + y - 1 < \lfloor x + y \rfloor \leq x + y$  et  $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$ . on en déduit :  $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor - 1 < \lfloor x + y \rfloor < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$ .

Comme ce sont des inégalités strictes entre nombres entiers, on peut les convertir en inégalités larges :  $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$ . Les deux seules valeurs possibles sont  $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$  ou  $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$

---

**Exercice 14 :** Démontrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \left\lfloor \frac{1}{n} \lfloor nx \rfloor \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$ .

.....  
Réponse : On va encadrer  $\lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor$ .

On a  $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \iff nx - n < n\lfloor x \rfloor \leq nx \iff -nx \leq -n\lfloor x \rfloor < -nx + n$  (1)

Et  $nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leq nx$  (2) Si on fait (2)-(1), on trouve :

$nx - 1 - nx < \lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor < nx - nx + n \iff -1 < \lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor < n \iff 0 \leq \lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor \leq n - 1$  (car ce sont des nombres entiers)

Donc en divisant par  $n$  on obtient  $0 \leq \frac{1}{n} \lfloor nx \rfloor - \lfloor x \rfloor \leq \frac{n-1}{n}$ .

Reste à ajouter  $\lfloor x \rfloor$  sur l'inégalité :  $\lfloor x \rfloor \leq \frac{1}{n} \lfloor nx \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \frac{n-1}{n}$ .

Comme on a par ailleurs  $\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1$  on a  $\lfloor x \rfloor \leq \frac{1}{n} \lfloor nx \rfloor < \lfloor x \rfloor + 1$  (★)

Par définition,  $\left\lfloor \frac{1}{n} \lfloor nx \rfloor \right\rfloor$  est l'unique entier qui encadre  $\frac{1}{n} \lfloor nx \rfloor$  de cette façon :

$\left\lfloor \frac{1}{n} \lfloor nx \rfloor \right\rfloor \leq \frac{1}{n} \lfloor nx \rfloor < \left\lfloor \frac{1}{n} \lfloor nx \rfloor \right\rfloor + 1$ . Mais on vient de prouver avec (★) que  $\lfloor x \rfloor$  est un entier qui réalise aussi cet encadrement.

Par unicité de la partie entière, on a donc  $\lfloor x \rfloor = \left\lfloor \frac{1}{n} \lfloor nx \rfloor \right\rfloor$ .

---

## Bornes supérieures, inférieures

**Exercice 15 :** (*En 1 minute*) Déterminer les bornes supérieures, inférieures, maximum ou minimum des ensembles suivants quand ils existent. Justifier lorsqu'ils n'existent pas.

- 1)  $[2, 6[$       2)  $[1, 2[ \cup ]3, +\infty[$       3)  $[4, 9[ \cap ]1, +\infty[$       4)  $\llbracket 1, n \rrbracket$       5)  $\{2p \mid p \in \llbracket 1, 9 \rrbracket\}$   
6)  $\left\{\frac{1}{x} \mid x \in [2, 3]\right\}$       7)  $\{\lfloor x \rfloor \mid x > 1\}$       8)  $\mathbb{R} \setminus [1, +\infty[$       9)  $\left\{\frac{x}{2} + k \mid x \in [0, 1[, k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket\right\}$   
.....

Réponse : Il faut bien justifier les résultats suivants, notamment sur les questions qui ne dépendent pas à priori d'un intervalle ( 4) 5) 6) 7) 9) ).

Rappel pour justifier le min, il faut justifier que c'est le plus petit élément. 2 choses à justifier : que c'est bien un élément , et que c'est le plus petit. Pareil pour le max.

Pour montrer que le max est inexistant quand on a une borne sup, il suffit de montrer que la borne sup n'appartient pas à l'ensemble.

Je ne justifie pas tous les résultats (pas le temps), les voici regroupés dans un tableau :

| Question | Ensemble                                                                             | Borne Inf     | Borne Sup     | Min           | Max           |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 1)       | $[2, 6[$                                                                             | 2             | 6             | 2             | Inexistant    |
| 2)       | $[1, 2[ \cup ]3, +\infty[$                                                           | 1             | Inexistant    | 1             | Inexistant    |
| 3)       | $[4, 9[ \cap ]1, +\infty[$                                                           | 1             | 9             | 1             | Inexistant    |
| 4)       | $\llbracket 1, n \rrbracket$                                                         | 1             | $n$           | 1             | $n$           |
| 5)       | $\{2p \mid p \in \llbracket 1, 9 \rrbracket\}$                                       | 2             | 18            | 2             | 18            |
| 6)       | $\left\{\frac{1}{x} \mid x \in [2, 3]\right\}$                                       | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 7)       | $\{\lfloor x \rfloor \mid x > 1\}$                                                   | 1             | Inexistant    | 1             | Inexistant    |
| 8)       | $\mathbb{R} \setminus [1, +\infty[$                                                  | Inexistant    | 1             | Inexistant    | Inexistant    |
| 9)       | $\left\{\frac{x}{2} + k \mid x \in [0, 1[, k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket\right\}$ | 0             | $\frac{7}{2}$ | 0             | Inexistant    |

**Exercice 16 :** (Bornes avec un scalaire) Soient  $A$  un sous ensemble non vide de  $\mathbb{R}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  et

$$C = \lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\}$$

1) Montrer que  $A$  est bornée  $\iff C$  est bornée.

2) Si  $\lambda > 0$ , montrer que  $\sup C = \lambda \sup A$  et  $\inf C = \lambda \inf A$ . 3) Que se passe-t-il si  $\lambda < 0$  ?

Réponse :  $\implies$  On a  $A$  bornée  $\implies \exists M_A \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A, |a| \leq M_A$  on a alors  $\forall c \in C, |c| = |\lambda a| \leq |\lambda| M_A$

Donc  $C$  est borné aussi.  $\impliedby$  Comme  $\lambda \neq 0$ , la réciproque est directe car  $A = \left\{\frac{1}{\lambda} c \mid c \in \mathbb{R}\right\} = \frac{1}{\lambda} C$  Donc c'est le même raisonnement que  $\implies$ .

1) Si  $\lambda > 0$  alors on a  $\lambda a \leq \lambda \sup A$  pour tout  $a \in A$ , donc  $\sup C \leq \lambda \sup A$  car c'est le plus petit majorant de  $C$ .

Ensuite, méthode 1 : si  $M$  est un majorant de  $C$ , on a pour tout  $a \in A$ ,  $\lambda a \leq M$ , ainsi  $a \leq \frac{M}{\lambda}$  et donc  $\frac{M}{\lambda}$  est un majorant de  $A$ . donc  $\sup A \leq \frac{M}{\lambda}$  et  $\lambda \sup A \leq M$ . donc  $\lambda \sup A$  est le plus petit majorant et on a  $\sup C = \lambda \sup A$ .

méthode 2 : On peut aussi trouver l'inégalité dans l'autre sens : pour tout  $a \in A$ , on a  $a = \frac{1}{\lambda} \lambda a \leq \frac{1}{\lambda} \sup C$  car  $\lambda a \in C$ .  $\frac{1}{\lambda} \sup C$  est donc un majorant de  $A$ . On en déduit  $\sup A \leq \frac{1}{\lambda} \sup C$  car  $\sup A$  est le plus petit majorant de  $A$  cela donne  $\lambda \sup A \leq \sup C$ .

Il suit que  $\sup C = \lambda \sup A$ . Pour l'inf c'est pareil mais avec  $\lambda \inf A \leq \inf C$

2) Si  $\lambda < 0$  alors on change les égalités en  $\sup C = \lambda \inf A$  et  $\inf C = \lambda \sup A$ . Cela se démontre rapidement

en utilisant le résultat vu en cours que  $\sup -A = -\inf A$ . On a en effet :  
 $\sup C = \sup(\lambda A) = \sup(-|\lambda|A) = |\lambda| \sup -A = -|\lambda| \inf A = \lambda \inf A$

---

**Exercice 17 :** (*Bornes de la somme*) Soient  $A$  et  $B$  deux sous ensembles non vides de  $\mathbb{R}$  et

$$C = A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

- 1) Montrer que  $A$  et  $B$  sont bornées  $\iff C$  est bornée.
- 2) Montrer que  $\sup C \leq \sup A + \sup B$  et  $\inf C \geq \inf A + \inf B$

Réponse : 1)  $\implies$  On a  $A$  et  $B$  bornées  $\implies \exists M_A, M_B \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A, \forall b \in B, |a| \leq M_A$  et  $|b| \leq M_B$ .  
Donc  $\forall c \in C, |c| = |a+b| \leq |a| + |b| \leq M_A + M_B$ . Donc  $C$  est majorée par  $M_A + M_B$  et minorée par  $-M_A - M_B$ .  
Donc  $C$  est bornée.

$\impliedby$  On suppose que  $C$  est bornée, majorée (en valeur absolue) par  $M_C$ . On montre que  $A$  est bornée. Si  $b \in B$  est fixé, on a  $\forall a \in A, |a+b| \leq M_C$  car  $a+b \in C$ . Nous on veut majorer  $|a|$ , il faut donc utiliser l'inégalité triangulaire dans l'autre sens :  $|a+b| \geq ||a| - |b||$ , donc  $|a| \leq |a+b| + |b| \leq M_C + |b| \leq M_C$ . On a donc  $M_C$  qui est un majorant (en valeur absolue) de  $A$ .

2) On a  $\forall (a, b) \in A \times B, a + b \leq \sup A + \sup B$ .  $\sup A + \sup B$  est donc un majorant de  $C$ , Donc

$$\sup C \leq \sup A + \sup B \quad \text{car } \sup C \text{ est le plus petit majorant de } C.$$

Dans l'autre sens, on a  $\forall (a, b) \in A \times B, a + b \leq \sup C$  Donc  $a \leq \sup C - b$  et donc  $\sup C - b$  est un majorant de  $A$ , on a :  $\sup A \leq \sup C - b$  pour tout  $b \in B$ . On a donc  $b \leq \sup C - \sup A$  et ceci étant vrai pour tout  $b \in B$ , on a  $\sup B \leq \sup C - \sup A$ . Finalement cela se réécrit  $\sup C \geq \sup A + \sup B$ .

Il suit que  $\sup C = \sup A + \sup B$ . Pour l'inf c'est pareil mais avec  $\inf A + \inf B \leq a + b$

---

**Exercice 18 :** (*Bornes du produit*) Soient  $A$  et  $B$  deux sous ensembles non vides de  $\mathbb{R}$  et

$$C = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$$

- 1) . 1.a) Montrer que  $A$  et  $B$  sont bornées  $\implies C$  est bornée.
- . 1.b) Que peut-on dire de la réciproque ?
- 2) . 2.a) Montrer que si  $A \subset \mathbb{R}_+$  et  $B \subset \mathbb{R}_+$  alors  $\sup C = \sup A \sup B$  et  $\inf C = \inf A \inf B$
- . 2.b) Est ce que cela reste vrai si on ne suppose pas  $A \subset \mathbb{R}_+$  et  $B \subset \mathbb{R}_+$  ?

Réponse : 1) . 1.a) On a  $A$  et  $B$  bornées  $\implies \exists M_A, M_B \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A, \forall b \in B, |a| \leq M_A$  et  $|b| \leq M_B$ .  
Donc  $\forall c \in C, |c| = |ab| \leq M_A M_B$ . Donc  $C$  est majorée par  $M_A M_B$  et minorée par  $-M_A M_B$ . Donc  $C$  est bornée.

. 1.b) La réciproque est fausse. Par exemple si  $A = \mathbb{R}$  et  $B = \{0\}$  on a  $C = \{0\}$  est bornée mais pas  $A$ .

2) Déjà si  $A = \{0\}$  ou  $B = \{0\}$ , on a  $C = \{0\}$  donc  $\sup C = \sup A \sup B = 0$  est valide. Dans la suite on considère donc que  $A$  et  $B$  contiennent des éléments strictement supérieurs à 0. On a  $\forall (a, b) \in A \times B, ab \leq \sup A \sup B$ .  $\sup A \sup B$  est donc un majorant de  $C$ , Donc

$$\sup C \leq \sup A \sup B \quad \text{car } \sup C \text{ est le plus petit majorant de } C.$$

Dans l'autre sens, on a  $\forall (a, b) \in A \times B \mid b \neq 0, ab \leq \sup C$  Donc  $a \leq \frac{\sup C}{b}$  et donc  $\frac{\sup C}{b}$  est un majorant de  $A$ , on a :  $\sup A \leq \frac{\sup C}{b}$  pour tout  $b \in B, b \neq 0$ . On a donc  $b \leq \frac{\sup C}{\sup A}$  ( $A \neq \{0\}$  donc  $\sup A > 0$ ) et ceci étant vrai pour tout  $b \in B$  (même  $b = 0$ ), on a  $\sup B \leq \frac{\sup C}{\sup A}$ . Finalement cela se réécrit  $\sup C \geq \sup A \sup B$ .

Il suit que  $\sup C = \sup A \sup B$ . Pour l'inf c'est pareil mais avec  $\inf A \inf B \leq a + b$

. 2.a) Non ça devient faux. Par exemple si  $A = \{-1, 1\}$  et  $B = [-2, 1]$  alors  $C = [-2, 2]$  et  $\sup C \neq \sup A \sup B$

---