

TD 3 - Sommes et Produits

1 BCPST 2 - A. Plouviez

Feuille d'exercice

Année 2025- 2026

Sommes simples

Exercice 1 : ♡ Ecrire à l'aide du symbole $\sum$ les sommes suivantes :

- 1) $1 + 2 + 3 + \dots + 10$ 2) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ 3) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$
4) $1 - 2 + 3 - 4 + \dots - 10$ 5) $n + (n+1) + \dots + 2n$

Exercice 2 : ♡ On suppose $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

- 1) $\sum_{i=0}^5 i$ 2) $\sum_{k=0}^3 (2k-1)$ 3) $\sum_{k=0}^4 (-1)^k k$ 4) $\sum_{i=0}^n 1$ 5) $\sum_{k=0}^n 2$ 6) $\sum_{l=0}^n n$ 7) $\sum_{i=2}^5 \ln(i)$
8) $\sum_{j=0}^{2n} (-1)^j$ 9) $\sum_{k=0}^n (k+1)^2 - k^2$ 10) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}$

Exercice 3 : ★ En utilisant les sommes classiques, calculer les sommes suivantes :

- 1) $\sum_{k=1}^n 2k-1$ 2) $\sum_{k=2}^n k^2 + k$ 3) $\sum_{k=0}^n (k+1)^2$ 4) $\sum_{k=0}^n 2^k + 3k$ 5) $\sum_{k=0}^n k(k+1)(k+2)$

Exercice 4 : ♡ Remplacer les "?" par leur valeurs dans les sommes suivantes :

- 1) $\sum_{k=1}^n a_{k+1} = \sum_{j=?}^? a_j$ 2) $\sum_{k=1}^n k a_{k-2} = \sum_{l=?}^? (l+2) a_l$ 3) $\sum_{k=1}^{n+1} a_{n-k} = \sum_{k=?}^? a_k$
4) $\sum_{k=1}^n a_{2k} + \sum_{k=1}^n a_{2k+1} = \sum_{j=?}^? a_j$

Exercice 5 : (*changement d'indice - ou pas*) ★ Soit $m, n \in \mathbb{N}$, calculer les sommes suivantes :

- 1) $\sum_{k=m}^n k$ 2) $\sum_{k=0}^n (n-k)^3 + k$ 3) $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k$ 4) $\sum_{k=0}^n 5^{2k+1}$ 5) $\sum_{k=0}^n 3^{\frac{k-2}{2}}$

Exercice 6 : (*Telescopage*) ★★ Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer les sommes suivantes :

- 1) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$ 2) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ 3) $\sum_{k=0}^n k \cdot k!$ 4) $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$ 5) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}$

Exercice 7 : (*Inégalités*) ★ - ★★ Prouver les inégalités suivantes :

- 1) $-n \leq \sum_{i=1}^n \cos i \leq n$ 2) $\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+i^2} \leq n$ 3) $\sum_{i=2^n}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq \frac{1}{2}$ 4) $1 \leq \sum_{i=1}^n \frac{2i\sqrt{i}}{n(n+1)} \leq \frac{2n+1}{3}$

Doubles sommes

Exercice 8 : ★ On suppose $n \in \mathbb{N}$. Calculer les doubles sommes suivantes :

- 1) $\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^3 i+j$ 2) $\sum_{i=0}^2 \left(i + \sum_{j=0}^2 ij \right)$ 3) $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 1$ 4) $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i$ 5) $\sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^n j$
6) $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n 2^j i$ 7) $\sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^{i+2} (-1)^j$

Exercice 9 : ★★ - ★★★ On suppose $n \in \mathbb{N}$. Calculer les doubles sommes suivantes :

$$\begin{array}{llll}
 1) \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} j & 2) \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i 3^{i+j} & 3) \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=0}^i (-1)^{i+j} j & 4) \sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j) \\
 5) \sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j) & 6) \sum_{1 \leq i, j \leq n} |i - j| & &
 \end{array}$$

Exercice 10 : (*interversion de sommes*) ★★ On suppose $n \in \mathbb{N}$. Calculer les doubles sommes suivantes :

$$1) \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n j^2 \quad 2) \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n \frac{i}{j} \quad 3) \sum_{k=0}^n k 2^k \quad \text{Indication : On utilisera que } k = \sum_{i=1}^k 1$$

Produit

Exercice 11 : ♥ Ecrire avec le symbole $\prod$ les produits suivants :

$$1) 1 \times 2 \times \dots \times n \quad 2) 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times 17 \quad 3) 1 \times 2 \times 4 \times 8 \dots \times 32$$

Exercice 12 : ♥ Soit $n \in \mathbb{N}$ Calculer les produits suivants :

$$\begin{array}{llllll}
 1) \prod_{k=1}^3 (2k+1) & 2) \prod_{k=0}^n k & 3) \prod_{k=1}^n 1 & 4) \prod_{k=1}^n 2 & 5) \prod_{k=1}^n 2^k & 6) \prod_{k=1}^n \frac{k}{k+1} \\
 7) \prod_{k=1}^n 2^k & & & & &
 \end{array}$$

Exercice 13 : ★ - ★★★ Soit $n, m \in \mathbb{N}$. Ecrire les produits suivants à l'aide de notations factorielles :

$$\begin{array}{llllll}
 1) \prod_{k=1}^n k & 2) \prod_{k=m+1}^n k & 3) \prod_{k=m+1}^n (k^2 - 1) & 4) \prod_{k=1}^n 2k & 5) \prod_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{(2k+1)(2k+2)} & 6) \prod_{k=1}^n (2k+1)
 \end{array}$$

Coefficients binomiaux

Exercice 14 : ♥ : Calculer les nombres suivants :

$$1) \binom{10}{2} \quad 2) \binom{6}{3} \quad 3) \binom{52}{51} \quad 4) \binom{112}{110} \quad 5) \binom{8}{4} \quad 6) \binom{1003}{1005} \quad 7) \binom{5}{-2}$$

Exercice 15 : ♥ En s'aidant du triangle de Pascal, développer les formules suivantes :

$$1) (1+x)^7 \quad 2) (1-x)^5 \quad 3) (x-y)^3 \quad 4) (x+x^2)^4 \quad 5) \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^6$$

Exercice 16 : (1-2-3-4 ★ / 5-6-7-8 ★★ / 9-10 ★★★) Calculer les sommes suivantes :

$$\begin{array}{llllll}
 1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} & 2) \sum_{k=n}^n \binom{n}{n-k} 2^k & 3) \sum_{k=n}^n \binom{n}{k} (-1)^k & 4) \sum_{k=n}^n \binom{n}{k} 3^{2k-1} & 5) \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \\
 6) \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} & 7) \sum_{1 \leq i, j \leq n} \binom{j}{i} & 8) \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \binom{n-i}{n-j} \binom{n}{i} & 9) \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{2k} & 10) \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}
 \end{array}$$

Exercice 17 : (*Classique*) ★★ Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, Montrer que $\sum_{k=0}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.