

Correction TD 1 - Sommes

BCPST 1

Feuilles d'exercices

Année 2022- 2023

Sommes simples

Exercice 1 : (*Apprentissage*) Ecrire à l'aide du symbole $\sum$ les sommes suivantes :

- 1) $1 + 2 + 3 + \dots + 10$ 2) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ 3) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$
4) $1 - 2 + 3 - 4 + \dots - 10$ 5) $n + (n+1) + \dots + 2n$

Réponses : 1) $\sum_{k=1}^{10} k$ 2) $\sum_{i=1}^n k^2$ 3) $\sum_{i=1}^n 2^k$ 4) $\sum_{k=1}^{10} (-1)^{k+1} k$ 5) $\sum_{k=n}^{2n} k$

Exercice 2 : (*En 1 minute*) On suppose $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

- 1) $\sum_{i=0}^5 i$ 2) $\sum_{k=0}^3 (2k-1)$ 3) $\sum_{k=0}^4 (-1)^k k$ 4) $\sum_{i=0}^n 1$ 5) $\sum_{k=0}^n 2$ 6) $\sum_{l=0}^n n$ 7) $\sum_{i=1}^2 \ln(i)$
8) $\sum_{j=0}^{2n} (-1)^j$ 9) $\sum_{k=0}^n (k+1)^2 - k^2$ 10) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}$

Réponses : 1) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ 2) $-1 + 1 + 3 + 5 = 8$ 3) $0-1+2-3+4 = 2$
4) $n+1$ 5) $2n+2$ 6) $n(n+1)$ 7) $\ln(2)$ 8) 1 9) $(n+1)^2$ 10) $\frac{1}{\sqrt{n+1}} - 1$

Exercice 3 : (*Résultats classiques*) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, Montrer les résultats suivants par récurrence :

- 1) $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ 2) $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{(2n+1)n(n+1)}{6}$ 3) $\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{(n(n+1))^2}{4}$ 4) $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Réponses : Voir le cours.

Exercice 4 : (*En 1 minute*) En utilisant les résultats de l'exercice précédent, calculer les sommes suivantes :

- 1) $\sum_{k=1}^n 2k-1$ 2) $\sum_{k=2}^n k^2 + k$ 3) $\sum_{k=0}^n (k+1)^2$ 4) $\sum_{k=0}^n 2^k + 3k$ 5) $\sum_{k=0}^n k(k+1)(k+2)$

Réponses : 1) n^2 2) $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ 3) $\frac{(2n+3)(n+1)(n+2)}{6}$ 4) $2^{n+1} - 1 + \frac{3}{2}n(n+1)$
5) $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

Exercice 5 : (*Changement d'indice*) Remplacer les "?" par leur valeurs dans les sommes suivantes :

- 1) $\sum_{k=1}^n a_{k+1} = \sum_{j=?}^? a_j$ 2) $\sum_{k=1}^n k a_{k-2} = \sum_{l=?}^? (l+2) a_l$ 3) $\sum_{k=1}^{n+1} a_{n-k} = \sum_{k=?}^? a_k$
4) $\sum_{k=1}^n a_{2k} + \sum_{k=1}^n a_{2k+1} = \sum_{j=?}^? a_j$

Réponses : 1) $\sum_{k=1}^n a_{k+1} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j$ 2) $\sum_{k=1}^n k a_{k-2} = \sum_{l=-1}^{n-2} (l+2) a_l$ 3) $\sum_{k=1}^{n+1} a_{n-k} = \sum_{k=-1}^{n-1} a_k$

$$4) \sum_{k=1}^n a_{2k} + \sum_{k=1}^n a_{2k+1} = \sum_{j=2}^{2n+1} a_j$$

Exercice 6 : (*Changement d'indice en pratique*) Soit $m, n \in \mathbb{N}$, calculer les sommes suivantes :

$$1) \sum_{k=m}^n k \quad 2) \sum_{k=0}^n (n-k)^3 + k \quad 3) \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k \quad 4) \sum_{k=0}^n 5^{2k+1} \quad 5) \sum_{k=0}^n 3^{\frac{k-2}{2}}$$

Réponses : 1) $\sum_{k=m}^n k = \sum_{k=0}^n k - \sum_{k=0}^{m-1} k = \frac{n(n+1) - m(m-1)}{2}$

2) On sépare la somme : $\sum_{k=0}^n (n-k)^3 + k = \sum_{\substack{l=0 \\ l=n-k}}^n l^3 + \sum_{k=0}^n k = \frac{(n(n+1))^2}{4} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n^2+n+2)}{4}$

3) On sépare les termes pairs et impairs $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k = \sum_{k=0}^n 2k - \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n(n+1) - n(n-1) - n = n$

4) $\sum_{k=0}^n 5^{2k+1} = \sum_{k=0}^n 5 \cdot (5^2)^k = 5 \cdot \sum_{k=0}^n 25^k = 5 \cdot \frac{1 - 25^{n+1}}{1 - 25} = \frac{5^{2n+3} - 5}{24}$

5) $\sum_{k=0}^n 3^{\frac{k-2}{2}} = \sum_{k=0}^n (3^{\frac{1}{2}})^k \cdot 3^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=0}^n \sqrt{3}^k = \frac{1 - \sqrt{3}^{n+1}}{3 - 3\sqrt{3}}$

Exercice 7 : (*Sommes télescopiques*) Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer les sommes suivantes :

$$1) \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \quad 2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \quad 3) \sum_{k=0}^n k \cdot k! \quad 4) \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} \quad 5) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}$$

Réponses : 1) On multiplie par la quantité conjuguée :

Cela donne : $\frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k+1-k} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$

Donc $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sum_{k=1}^n \sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \boxed{\sqrt{n+1} - 1}$ par télescopage.

2) On remarque que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ Donc $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \boxed{1 - \frac{1}{n+1}}$ par télescopage.

3) On réécrit k pour faire apparaître $k+1$: $k \cdot k! = (k+1-1) \cdot k! = (k+1)k! - k! = (k+1)! - k!$

Donc $\sum_{k=0}^n k \cdot k! = \boxed{(n+1)! - 1}$ par télescopage.

4) C'est comme le précédent : $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$ Donc $\sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!} = \boxed{1 - \frac{1}{(n+1)!}}$

5) Il faut remarquer deux télescopes : $\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2} = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)$.

On a $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$ et $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$

Finalement on a donc $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2} = 1 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \boxed{\frac{n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}}$

Exercice 8 : ★ - ★★ Prouver les inégalités suivantes :

$$1) -n \leq \sum_{i=1}^n \cos i \leq n \quad 2) \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+i^2} \leq n \quad 3) \sum_{i=2^n}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq \frac{1}{2} \quad 4) 1 \leq \sum_{i=1}^n \frac{2i\sqrt{i}}{n(n+1)} \leq \frac{2n+1}{3}$$

$$1) \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, -1 \leq \cos i \leq 1 \implies \sum_{i=1}^n -1 \leq \sum_{i=1}^n \cos i \leq \sum_{i=1}^n 1 \implies -n \leq \sum_{i=1}^n \cos i \leq n$$

$$2) \frac{1}{1+i^2} \leq 1 \implies \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+n=i^2} \leq n \text{ comme précédemment.}$$

$$3) \text{ On remarque que } \forall i \in \llbracket 2^n, 2^{n+1} \rrbracket, \frac{1}{i} \geq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

$$\sum_{i=2^n}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq \sum_{i=2^n}^{2^{n+1}} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=2^n}^{2^{n+1}} 1 = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot (2^{n+1} - 2^n + 1) = \frac{2^n \cdot (2-1) + 1}{2^{n+1}} = \frac{2^n + 1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} \geq \frac{1}{2}$$

$$4) \text{ On remarque que } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, 1 \leq \sqrt{i} \leq i \implies i \leq i\sqrt{i} \leq i^2$$

$$\text{Ainsi } \sum_{i=1}^n i \leq \sum_{i=1}^n i\sqrt{i} \leq \sum_{i=1}^n i^2 \implies \frac{n(n+1)}{2} \leq \sum_{i=1}^n i\sqrt{i} \leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{En multipliant tout par } \frac{2}{n(n+1)} \text{ on obtient le résultat : } 1 \leq \sum_{i=1}^n \frac{2i\sqrt{i}}{n(n+1)} \leq \frac{2n+1}{3}$$

Doubles sommes

Exercice 9 : (En 1 minute) On suppose $n \in \mathbb{N}$. Calculer les doubles sommes suivantes :

$$1) \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^3 i+j \quad 2) \sum_{i=0}^2 \left(i + \sum_{j=0}^2 ij \right) \quad 3) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 1 \quad 4) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i \quad 5) \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^n j$$

$$6) \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n 2^j i \quad 7) \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^{i+2} (-1)^j$$

$$\text{Réponses : } 1) \underbrace{(0+1+2+3)}_{i=0} + \underbrace{(1+2+3+4)}_{i=1} + \underbrace{(2+3+4+5)}_{i=2} = 30$$

$$2) \sum_{i=0}^2 \left(i + \sum_{j=0}^2 ij \right) = \sum_{i=0}^2 i + \sum_{i=0}^2 i \cdot \sum_{j=0}^2 j = 1+2+(1+2) \cdot (1+2) = 12 \quad 3) n^2 \quad 4) \frac{n^2(n+1)}{2}$$

$$5) \frac{n(n+1)^2}{2} \quad 6) \frac{n(n+1)(2^{n+1}-1)}{2}$$

$$7) \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^{i+2} (-1)^j = \sum_{i=0}^n (-1)^i + (-1)^{i+1} + (-1)^{i+2} = \sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot (1-1+1) = \sum_{i=0}^n (-1)^i = \frac{1-(-1)^{n+1}}{2}$$

Exercice 10 : On suppose $n \in \mathbb{N}$. Calculer les doubles sommes suivantes :

$$1) \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} j \quad 2) \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i 3^{i+j} \quad 3) \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=0}^i (-1)^{i+j} j \quad 4) \sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j) \quad 5) \sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j)$$

$$6) \sum_{1 \leq i, j \leq n} |i-j|$$

Réponses :

$$1) \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} j = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j j = \sum_{j=0}^n j(j+1) = \sum_{j=0}^n j^2 + j = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \boxed{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}}$$

$$2) \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i 3^{i+j} = \sum_{i=0}^n 3^i \sum_{j=0}^i 3^j = \sum_{i=0}^n 3^i \frac{3^{i+1}-1}{3-1} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n 3^{2i+1} - 3^i = \frac{1}{2} \left(3 \cdot \frac{1-3^{2n+2}}{1-3^2} - \frac{1-3^{n+1}}{1-3} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{-3}{8} (1 - 9^{n+1}) + \frac{1}{2} (1 - 3^{n+1}) \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} (-3 + 3 \cdot 3^{2n+2} + 4 - 4 \cdot 3^{n+1}) = \boxed{\frac{1 - 4 \cdot 3^{n+1} + 3^{2n+3}}{16}}$$

$$\begin{aligned} 3) \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=0}^i (-1)^{i+j} &= \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \sum_{j=0}^i (-1)^j j = \sum_{i=0}^n (-1)^{2i} \sum_{j=0}^{2i} (-1)^j j + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{2i+1} \sum_{j=0}^{2i+1} (-1)^j j \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{2i} (-1)^j j - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{2i+1} (-1)^j j = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{2i} (-1)^j j - \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{2i} (-1)^j j - (2i+1) \right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^n i - \sum_{i=0}^{n-1} (i - (2i+1)) \text{ d'après l'exercice 6 question 3.}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} - \sum_{i=0}^{n-1} -i - 1 = \frac{n(n+1)}{2} + \sum_{i=0}^{n-1} i + \sum_{i=0}^{n-1} 1 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + n$$

$$= \frac{n}{2} (n+1 + n-1 + 2n) = \boxed{2n^2}$$

$$4) \sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \min(i, j) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^i j + \sum_{j=i+1}^n i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i(i+1)}{2} + i(n-i) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (2n+1)i - i^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(2n+1)n(n+1)}{2} - \frac{(2n+1)n(n+1)}{6} \right) = \boxed{\frac{(2n+1)n(n+1)}{6}}$$

$$5) \sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \min(i, j) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^i i + \sum_{j=i+1}^n j \right) = \sum_{i=1}^n \left(i^2 + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2} \right) = \dots$$

La suite du calcul est laissée au lecteur.

Méthode plus astucieuse avec la question précédente et les résultats de l'exercice 7 question 4 :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} i + j - \min(i, j) = n^2(n+1) - \frac{(2n+1)n(n+1)}{6} = \boxed{\frac{(4n-1)n(n+1)}{6}}$$

6) Méthode 1 : On peut faire le gros calcul :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i, j \leq n} |i - j| &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |i - j| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i i - j + \sum_{j=i+1}^n j - i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i i - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n j - \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n i \\ &= \sum_{i=1}^n i^2 - \sum_{i=1}^n \frac{i(i+1)}{2} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2} \right) - \sum_{i=1}^n i(n-i) = 2 \sum_{i=1}^n i^2 - \sum_{i=1}^n (i^2 + i) + \frac{n^2(n+1)}{2} - n \sum_{i=1}^n i \\ &= \sum_{i=1}^n i^2 - (n+1) \sum_{i=1}^n i + \frac{n^2(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)^2}{2} + \frac{n^2(n+1)}{2} = \boxed{\frac{n(n+1)(n-1)}{3}} \end{aligned}$$

Méthode 2 : comme précédemment, on utilise le résultat du min ou du max. On sait par exemple que $\min(i, j) = \frac{1}{2}(i + j - |i - j|) \iff |i - j| = i + j - 2\min(i, j)$ D'où :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} |i - j| = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (i + j) - 2 \cdot \sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j) = n^2(n+1) - 2 \frac{(2n+1)n(n+1)}{6} = \boxed{\frac{(n-1)n(n+1)}{3}}$$

Exercice 11 : (*Interversion de sommes*) On suppose $n \in \mathbb{N}$. Calculer les doubles sommes suivantes :

$$1) \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n j^2 \quad 2) \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n \frac{i}{j} \quad 3) \sum_{k=0}^n k 2^k \quad \text{Indication : On utilisera que } k = \sum_{i=1}^k 1$$

Réponses :

$$1) \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n j^2 = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j j^2 = \sum_{j=0}^n j^2(j+1) = \sum_{j=0}^n j^3 + j^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \boxed{\frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{6}}$$

$$2) \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n \frac{i}{j} = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j \frac{i}{j} = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j} \sum_{i=0}^j i = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j} \cdot \frac{j(j+1)}{2} = \sum_{j=0}^n \frac{j+1}{2} = \frac{n(n+1)}{4} + \frac{n}{2} = \boxed{\frac{n(n+3)}{4}}$$

$$\begin{aligned}
3) \sum_{k=0}^n k2^k &= 0 + \sum_{k=1}^n k2^k = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k 2^k = \sum_{j=1}^n \sum_{k=j}^n 2^k = \sum_{j=1}^n 2^j \frac{1-2^{n-j+1}}{1-2} = \sum_{j=1}^n 2^{n+1} - 2^j \\
&= n2^{n+1} - \left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2} - 1 \right) = \boxed{(n+1)2^{n+1} - 2}
\end{aligned}$$

Produit

Exercice 12 : (*Apprentissage*) Ecrire avec le symbole $\prod$ les produits suivants :

1) $1 \times 2 \times \dots \times n$ 2) $1 \times 3 \times 5 \times \dots \times 17$ 3) $1 \times 2 \times 4 \times 8 \dots \times 32$

.....

Réponses :

1) $1 \times 2 \times \dots \times n = \prod_{k=1}^n k = n!$ 2) $1 \times 3 \times 5 \times \dots \times 17 = \prod_{k=1}^n 2k+1$ 3) $1 \times 2 \times 4 \times 8 \dots \times 32 = \prod_{k=0}^n 2^k$

Exercice 13 : (*En 1 minute*) Soit $n \in \mathbb{N}$ Calculer les produits suivants :

1) $\prod_{k=1}^3 (2k+1)$ 2) $\prod_{k=0}^n k$ 3) $\prod_{k=1}^n 1$ 4) $\prod_{k=1}^n 2$ 5) $\prod_{k=1}^n 2^n$ 6) $\prod_{k=1}^n \frac{k}{k+1}$ 7) $\prod_{k=1}^n 2^k$

.....

Réponses :

1) $\prod_{k=1}^3 (2k+1) = 3 \times 5 \times 7 = 105$ 2) $\prod_{k=0}^n k = 0 \times 1 \times 2 \times \dots = 0$ 3) $\prod_{k=1}^n 1 = 1 \times 1 \times \dots \times 1 = 1$ 4) $\prod_{k=1}^n 2 = \underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{n \text{ fois}} = 2^n$ 5) $\prod_{k=1}^n 2^n = (2^n)^n = 2^{n^2}$ 6) $\prod_{k=1}^n \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$

7) $\prod_{k=1}^n 2^k = 2^{\sum_{k=1}^n k} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$

Exercice 14 : (*Factorielles*) Soit $n, m \in \mathbb{N}$. Ecrire les produits suivants à l'aide de notations factorielles :

1) $\prod_{k=1}^n k$ 2) $\prod_{k=m+1}^n k$ 3) $\prod_{k=m+1}^n (k^2 - 1)$ 4) $\prod_{k=1}^n 2k$ 5) $\prod_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{(2k+1)(2k+2)}$ 6) $\prod_{k=1}^n (2k+1)$

.....

Réponses : 1) $\prod_{k=1}^n k = n!$ 2) $\prod_{k=m+1}^n k = \frac{\prod_{k=1}^n k}{\prod_{k=1}^m k} = \frac{n!}{m!}$

3) $\prod_{k=m+1}^n (k^2 - 1) = \prod_{k=m+1}^n (k-1)(k+1) = \prod_{k=m+1}^n (k-1) \cdot \prod_{k=m+1}^n (k+1) = \prod_{k=m}^{n-1} k \cdot \prod_{k=m+2}^{n+1} k = \frac{(n-1)!(n+1)!}{(m-1)!(m+1)!}$

4) $\prod_{k=1}^n 2k = 2^n \prod_{k=1}^n k = 2^n n!$ 5) $\prod_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{(2k+1)(2k+2)} = \frac{\sqrt{\prod_{k=1}^n k}}{\prod_{k=1}^n (2k+1)(2k+2)} = \frac{2\sqrt{n!}}{(2n+2)!}$

6) $\prod_{k=1}^n (2k+1) = \frac{\prod_{k=1}^{2n+1} k}{\prod_{k=1}^n 2k} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$

Coefficients binômiaux

Exercice 15 : (*En 1 minute*) : Calculer les nombres suivants :

1) $\binom{10}{2}$ 2) $\binom{6}{3}$ 3) $\binom{52}{51}$ 4) $\binom{112}{110}$ 5) $\binom{8}{4}$ 6) $\binom{1003}{1005}$ 7) $\binom{5}{-2}$

Réponses : 1) $\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ 2) $\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$ 3) $\binom{52}{51} = \binom{52}{1} = \frac{52}{1} = 52$
 4) $\binom{112}{110} = \frac{112 \cdot 111}{2} = 56 \cdot 111 = 6216$ 5) $\binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$
 6) $\binom{1003}{1005} = 0$ car $1005 > 1003$ 7) $\binom{5}{-2} = 0$ car $-2 < 0$

Exercice 16 : (En 1 minute) En s'aidant du triangle de Pascal, développer les formules suivantes :

1) $(1+x)^7$ 2) $(1-x)^5$ 3) $(x-y)^3$ 4) $(x+x^2)^4$ 5) $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^6$

Réponses : Affichons déjà le triangle de pascal jusqu'à $n = 7$:

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

1) $(1+x)^7 = x^7 + 7x^6 + 21x^5 + 35x^4 + 35x^3 + 21x^2 + 7x + 1$
 2) $(1-x)^5 = (-x)^5 + 5(-x)^4 + 10(-x)^3 + 10(-x)^2 + 5(-x) + 1 = -x^5 + 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 5x + 1$
 3) $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ 4) $(x+x^2)^4 = x^4 + 4x^3x^2 + 6x^2x^4 + 4xx^6 + x^8 = x^8 + 6x^7 + 6x^6 + 4x^5 + x^4$
 5) Je propose une autre méthode pour celui ci : $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^6 = \frac{1}{x^6}(1+x^3)^6$
 $= \frac{1}{x^6}(x^{18} + 6x^{15} + 15x^{12} + 20x^9 + 15x^6 + 6x^3 + 1) = x^{12} + 6x^9 + 15x^6 + 20x^3 + 15 + 6x^{-3} + x^{-6}$

Exercice 17 : Calculer les sommes suivantes (1-2-3-4 faciles / 5-6-7-8 Moyennes/ 9-10 Difficiles) :

1) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ 2) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} 2^k$ 3) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$ 4) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{2k-1}$ 5) $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$
 6) $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$ 7) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \binom{j}{i}$ 8) $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \binom{n-i}{n-j} \binom{n}{i}$ 9) $\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$ 10) $\sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}$

Réponses : 1) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = \boxed{2^n}$ 2) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} 2^k = (1+2)^n = \boxed{3^n}$
 3) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = (1+(-1))^n = \boxed{0}$ 4) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{2k-1} = \frac{1}{3} \sum_{k=n}^n \binom{n}{k} 9^k = \boxed{\frac{10^k}{3}}$
 5) $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = \boxed{n2^{n-1}}$
 6) $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n nk \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=0}^n (k-1+1) \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=0}^n (k-1) \binom{n-1}{k-1} + n \sum_{k=0}^n 1 \binom{n-1}{k-1}$
 $= n \sum_{k=0}^n (n-1) \binom{n-2}{k-2} + n2^{n-1} = n(n-1) \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} + n2^{n-1} = n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} + n2^{n-1}$
 $= n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = \boxed{n(n+1)2^{n-2}}$

$$7) \sum_{1 \leq i, j \leq n} \binom{j}{i} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \binom{j}{i} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^j \binom{j}{i} - 1 \right) = \sum_{j=1}^n 2^j - 1 = \boxed{2^{n+1} - 2 - n}$$

$$8) \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \binom{n-i}{n-j} \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \sum_{j=0}^n \binom{n-i}{j} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^{n-i} = \boxed{3^n}$$

$$9) \text{ On utilise (1) : } 2^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \text{ et (2) } 0 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k. \text{ On a } (1) + (2) = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} (1 + (-1)^k) = 2^n + 0.$$

On a $(1 + (-1)^k) = 0$ pour tout k impair, donc dans cette somme il n'y a en fait que les termes pairs qui sont non nuls : $2^n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (1 + (-1)^{2k}) = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} \cdot 2 = 2 \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}.$

En divisant par 2 on trouve $\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} = \boxed{2^{n-1}}.$

10) Celui ci est plus facile quand on a fait le précédent en effet :

$$\sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} + \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Donc $\sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} = 2^n - \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} = 2^n - 2^{n-1} = \boxed{2^{n-1}}$

Exercice 18 : (Classique) Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, Montrer que $\sum_{k=0}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$

.....

Réponse : En utilisant le théorème de Pascal sur les coefficients binômiaux $\binom{k}{p+1} + \binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1},$

on fait apparaitre une somme télescopique :

$$\sum_{k=0}^n \binom{k}{p} = \sum_{k=0}^n \binom{k+1}{p+1} - \underbrace{\binom{k}{p+1}}_{=0 \text{ car } p+1 > 0} = \binom{n+1}{p+1}$$