

TD 4 - Applications et Fonctions

1 BCPST 2 - A. Plouviez

Feuille d'exercice

Année 2025- 2026

Injection / Surjection

Exercice 1 : ★ - ★★ Les fonctions suivantes sont elles injectives, surjectives bijectives? Si elles sont bijectives, déterminer leur réciproque.

$$\begin{array}{llll} 1) f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \cos x \end{cases} & 2) f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{Z} \\ x & \mapsto [x] \end{cases} & 3) f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto |x| \end{cases} & 4) f : \begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow \mathbb{N} \\ n & \mapsto n+1 \end{cases} \\ 5) f : \begin{cases} \mathbb{Z} & \rightarrow \mathbb{Z} \\ n & \mapsto n+1 \end{cases} & 6) f : \begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow \{-1, 1\} \\ x & \mapsto (-1)^n \end{cases} & 7) f : \begin{cases} \mathbb{Z} & \rightarrow \mathbb{N} \\ n & \mapsto n^2 \end{cases} & 8) f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (x+y, x-y) \end{cases} \end{array}$$

Exercice 2 : (Composée ★) Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow I$ deux applications.

- 1) Si f et g sont injectives, montrer que $f \circ g$ est injective sur J .
- 2) Si f et g sont surjectives, montrer que $f \circ g$ est surjective à valeur dans $\mathbb{R}$.
- 3) Si f et g sont bijectives, que peut-on dire de $f \circ g$?

Exercice 3 : (Fonctions réciproques ★ - ★★) Pour les fonctions suivantes justifier qu'elles sont bijectives en calculant la fonction réciproque.

- 1) $f : [1, 3] \rightarrow [1, 3]$ avec $f(1) = 1$, $f(2) = 3$ et $f(3) = 2$.
- 2) $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, g(n) = n + 1$
- 3) $g \circ f : [1, 3] \rightarrow [2, 4]$
- 4) $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ avec $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} h(n) = p \text{ si } n = 2p \\ h(n) = -p \text{ si } n = 2p + 1 \end{cases}$

Exercice 4 : (Involution ★) 1) Sur un graphe, tracer la première bissectrice ($y = x$), puis des droites d'équation $y = a - x$ pour plusieurs valeurs de $a \in \mathbb{R}$.

- 2) Montrer que la fonction $f : x \mapsto a - x$ est une involution (c'est à dire que la réciproque est égale à elle-même)
- 3) Expliquer pourquoi le résultat de la question 2) s'observe graphiquement.

Exercice 5 : (Indicatrice ★★) Soit E un ensemble. Montrer les propriétés suivantes :

- 1) Si $F \subset E$ alors $F = \mathbb{1}_F^{-1}(1)$ et $\overline{F} = \mathbb{1}_F^{-1}(0)$
- 2) Si $A, B \in P(E)$ tels que $A \cap B = \emptyset$ alors $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A \cup B}$
- 3) Si $A, B \in P(E)$ alors $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.

Ensemble de définition, d'arrivée, graphe

Exercice 6 : ♥ Donner l'ensemble de définition de ces fonctions :

$$\begin{array}{llllll} 1) x \mapsto \sqrt{|x-1|} & 2) x \mapsto \frac{1}{x+2} & 3) x \mapsto \frac{x+18}{x-21} & 4) x \mapsto \sqrt{17+x} & 5) x \mapsto \ln \frac{1}{x} \\ 6) x \mapsto \sqrt{\ln x} & 7) x \mapsto \sqrt{\cos x} & 8) x \mapsto \frac{1}{\sin x} & 9) x \mapsto \ln \frac{1}{\cos(x)-1} & 10) x \mapsto \frac{1}{\tan x} \\ 11) x \mapsto \tan(x+1) & 12) x \mapsto \tan x^2 & 13) x \mapsto \tan e^x & & \end{array}$$

Exercice 7 : (Ensemble d'Arrivée ★) A l'aide des graphes des fonctions usuelles ou du cercle trigonométrique, déterminer les ensembles suivants : 1) $\sin\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ 2) $\cos\left(\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]\right)$ 3) $\tan\left(\left[\frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right]\right)$

Exercice 8 : (Petites transformations ★) A l'aide des graphes des fonctions usuelles, représenter les fonctions suivantes :

$$1) x \mapsto e^{-x} + 1 \quad 2) x \mapsto \sqrt{x+1} \quad 3) x \mapsto \ln \frac{1}{x} \quad 4) x \mapsto \frac{-1}{x-1} \quad 5) x \mapsto -|x+2| - 1$$

Exercice 9 : ★ Trouves les lien existants de prolongement, restriction parmi ces fonctions :

$$\begin{array}{llll} 1) f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto |x| \end{cases} & 2) f_2 : \begin{cases} [1, 2[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto 1 \end{cases} & 3) f_3 : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x - [x] \end{cases} & 4) f_4 : \begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ z & \mapsto |z| \end{cases} \\ 5) f_5 = \text{id}_{\mathbb{R}_+} & 6) f_6 = \text{id}_{[0,1[} & 7) f_7 = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} & 8) f_8 = [\cdot] \end{array}$$

Exercice 10 : ★ 1) Représenter graphiquement les fonctions suivantes sur leur domaine de définition :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 2-x & \text{si } x \geq 2 \\ x^2+1 & \text{si } x < 2 \end{cases} \end{cases} \quad \text{et } g : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1+\frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \end{cases}$$

2) A l'aide du graphique, donner $f(\mathbb{R}_-)$ et $f(\mathbb{R}_+)$ ainsi que $g([0, 2])$, $g([1, +\infty[)$.

3) f est-elle surjective? Injective? Déterminer deux intervalles I et J tels que $f : I \rightarrow J$ soit bijective.

4) g est-elle surjective? Injective? Déterminer deux intervalles I et J tels que $g : I \rightarrow J$ soit bijective.

Exercice 11 : ★★ Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x - 2}$

1) Donner le domaine de définition D_f de f .

2) Déterminer l'image de f , c'est à dire $f(D_f)$.

3) L'application f est-elle injective sur D_f ?

Exercice 12 : ★★ Soit $f : x \mapsto \frac{x^2 - 1}{2x - 1}$

1) Donner le domaine de définition D_f de f .

2) Déterminer l'image de f , c'est à dire $f(D_f)$.

3) L'application f est-elle injective sur D_f ? Est-elle surjective à valeur dans $\mathbb{R}$?

Etude de fonction

Exercice 13 : ♥ Donner l'ensemble de définition, la parité et la période (si elles sont périodiques) des fonctions suivantes :

1) $x \rightarrow \cos(2x)$ 2) $x \rightarrow \sin \frac{x}{5}$ 3) $x \rightarrow \sin^2 x$ 4) $x \rightarrow x^2 + x^4$ 5) $x \rightarrow \tan x^2$

6) $x \rightarrow \frac{1}{x^{11}}$ 7) $x \rightarrow \cos \frac{1}{x}$ 8) $x \rightarrow \frac{\sin x}{\sin 3x}$ 9) $x \rightarrow \tan |x|$ 10) $x \rightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

11) $\ln \sqrt{1+x^2}$ 12) $\ln \frac{1+x}{1-x}$ 13) $x \rightarrow \frac{|x|}{x}$

Exercice 14 : (Parité ★★) Etudier la parité des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{e^{5x} - e^{-x}}{e^{4x} - 1}$ 2) $g(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 3) $h(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ -\sqrt{|x|} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Exercice 15 : (Pour des inégalités ★ - ★★) A l'aide d'une étude de fonction, démontrer les inégalités suivantes :

1) $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x$ 2) $\forall x \in \mathbb{R}_+, \sin x \leq x$ 3) $\forall x > 1, 1 - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

4) $\forall x \in \mathbb{R}, \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ 5) $\forall x \in [0, 1], x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ 6) $\forall x > 0, \frac{1}{x} + x \geq 2$

Exercice 16 : (★★ - ★★★) Démontrer les inégalités suivantes :

1) $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq \frac{x^2}{2}$ 2) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq \frac{x^n}{n!}$

Exercice 17 : (★★) On souhaite déterminer la limite de la suite $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

1) Montrer que $\forall x > 0, \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$

2) En déduire un encadrement de $\frac{1}{x}$ pour $x > 1$.

3) En déduire la limite de u_n quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 18 : (Asymptotes ★ - ★★) Faire un tableau de variation et donner les asymptotes des fonctions suivantes :

1) $f : x \rightarrow \frac{x+2}{2x+1}$ 2) $f : x \rightarrow \frac{1+x^2}{1-x^2}$ 3) $f : x \mapsto \ln|\tan x|$ 4) $f : x \rightarrow x^{-\ln x}$

Exercice 19 : (fonctions et sommes ★★★) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Etudier les variations des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \sum_{k=0}^n x^k$ 2) $f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k$ 3) $f(x) = \prod_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} k$ 4) $f(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \sum_{i=0}^k x^i$