

TD - Applications et Fonctions usuelles

BCPST 1

Feuille d'exercice

Année 2022- 2023

Injection / Surjection

Exercice 1 : Les fonctions suivantes sont elles injectives, surjectives bijectives ? Si elles sont bijectives, déterminer leur réciproque.

- 1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \cos x$ 2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$
 $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ 3) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $x \mapsto |x|$ 4) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $n \mapsto n+1$ 5) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
 $n \mapsto n+1$ 6) $f: \mathbb{N} \rightarrow \{-1, 1\}$
 $x \mapsto (-1)^n$ 7) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$
 $n \mapsto n^2$ 8) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto (x+y, x-y)$

Réponses :

Qu	Fonction	Injective	Surjective	Bijective	Réciproque
1)	$x \mapsto \cos x$	Non	Non	Non	/
2)	$x \mapsto \lfloor x \rfloor$	Non	Oui	Non	/
3)	$x \mapsto x $	Non	Oui	Non	/
4)	$n \mapsto n+1$	Oui	Non	Non	/
5)	$n \mapsto n+1$	Oui	Oui	Oui	$n \mapsto n-1$
6)	$x \mapsto (-1)^n$	Non	Oui	Non	/
7)	$n \mapsto n^2$	Non	Oui	Non	/
8)	$(x, y) \mapsto (x+y, x-y)$	Oui	Oui	Oui	$(x, y) \mapsto \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)$

Exercice 2 : (Composée) Soient $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: J \rightarrow I$ deux applications.

- Si f et g sont injectives, montrer que $f \circ g$ est injective sur J .
- Si f est surjective et g est injective, montrer que $f \circ g$ est surjective à valeur dans $\mathbb{R}$.
- Si f et g sont bijectives, que peut-on dire de $f \circ g$?
- Montrer que si $f \circ g$ est injective alors g est injective.
- Montrer que si $f \circ g$ est surjective alors f est surjective.

Réponses :

- 1) On a $\forall x, y \in J, f \circ g(x) = f \circ g(y) \iff f(g(x)) = f(g(y)) \xRightarrow{f \text{ injective}} g(x) = g(y) \xRightarrow{g \text{ injective}} x = y$.

Donc par définition de l'injectivité, $f \circ g$ est injective.

- 2) Comme g est surjective, on a $g(J) = I$. On a donc $f \circ g(J) = f(g(J)) = f(I) = \mathbb{R}$ car f est surjective. Je n'ai pas prouvé en cours que $f \circ g(J) = f(g(I))$. Prouvons le maintenant.

$$\text{On a } y \in f \circ g(J) \iff \exists x \in J \mid y = f(g(x)) \iff \exists z \in g(J) \mid y = f(z) \iff y \in f(g(J))$$

Donc les calcul plus haut est valable et $f \circ g$ est bien surjective à valeur dans $\mathbb{R}$.

- 3) $f \circ g$ est bijective : injective d'après la question 1) et surjective d'après la question 2).

- 4) Si $f \circ g$ est injective alors soit $x, y \in J$.

$$\text{On a } g(x) = g(y) \implies f(g(x)) = f(g(y)) \xRightarrow{f \circ g \text{ injective}} x = y \text{ donc } g \text{ est injective.}$$

- 5) On a $g(J) \subset I \implies f(g(J)) \subset f(I) \implies f \circ g(J) \subset f(I) \implies \mathbb{R} \subset f(I)$.

Donc $f(I) = \mathbb{R}$ et f est surjective.

Exercice 3 : (Fonctions réciproques) Pour les fonctions suivantes justifier qu'elles sont bijectives en calculant

la fonction réciproque. **1)** $f : \llbracket 1, 3 \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, 3 \rrbracket$ avec $f(1) = 1$, $f(2) = 3$ et $f(3) = 2$.

2) $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(n) = n + 1$ **3)** $g \circ f : \llbracket 1, 3 \rrbracket \rightarrow \llbracket 2, 4 \rrbracket$

4) $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ avec $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} h(n) = p \text{ si } n = 2p \\ h(n) = -p \text{ si } n = 2p + 1 \end{cases}$

Réponses : Dans chacune des questions il suffit de trouver une fonction réciproque pour montrer qu'elle est bijective.

1) On remarque que $f^{-1} = f$. **2)** On a $g^{-1}(n) = n - 1$

3) On a $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} = f \circ g^{-1} : n \rightarrow f(n - 1)$

4) On a $h^{-1}(p) = \begin{cases} 2p \text{ si } p \geq 0 \\ -2p + 1 \text{ si } p < 0 \end{cases} = 2|p| - \frac{1}{2} \left(\frac{|p|}{p} - 1 \right)$.

Exercice 4 : (Involution) **1)** Sur un graphe, tracer la première bissectrice ($y = x$), puis des droites d'équation $y = a - x$ pour plusieurs valeurs de $a \in \mathbb{R}$.

2) Montrer que la fonction $f : x \mapsto a - x$ est une involution (c'est à dire que la réciproque est égale à elle-même)

3) Expliquer pourquoi le résultat de la question 2) s'observe graphiquement.

Réponses : **1)** Ce sont les droites perpendiculaires à $y = x$.

2) On a $f(f(x)) = a - (a - x) = a - a + x = x$

3) On voit que la droite $y = a - x$ est symétrique par rapport à la première bissectrice.

Exercice 5 : (Indicatrice) Soit E un ensemble. Montrer les propriétés suivantes :

1) Si $F \subset E$ alors $F = \mathbb{1}_F^{-1}(1)$ et $\overline{F} = \mathbb{1}_F^{-1}(0)$

2) Si $A, B \in P(E)$ tels que $A \cap B = \emptyset$ alors $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A \cup B}$

3) Si $A, B \in P(E)$ alors $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.

Réponses : **1)** Voir le cours **2)** Si $x \notin A \cup B$ alors $\mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) = 0 = \mathbb{1}_{A \cup B}(x)$.

Si $x \in A \cup B$ alors soit $x \in A$ et $\mathbb{1}_A(x) = 1 = \mathbb{1}_{A \cup B}(x)$ et $\mathbb{1}_B(x) = 0$ donc l'égalité est vraie. Sinon, $x \in B$ et c'est vrai aussi par symétrie de A et B . On a bien, $\forall x \in E$, $\mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) = \mathbb{1}_{A \cup B}(x)$ donc $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A \cup B}$.

3) $\mathbb{1}_{A \cap B}(x) = 1 \iff x \in A \cap B \iff x \in A \text{ et } x \in B \iff \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 1$. Donc $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.

Ensemble de définition, d'arrivée, graphe

Exercice 6 : (En 1 minute) Donner l'ensemble de définition de ces fonctions :

1) $x \mapsto \sqrt{|x - 1|}$ **2)** $x \mapsto \frac{1}{x + 2}$ **3)** $x \mapsto \frac{x + 18}{x - 21}$ **4)** $x \mapsto \sqrt{17 + x}$ **5)** $x \mapsto \ln \frac{1}{x}$
6) $x \mapsto \sqrt{\ln x}$ **7)** $x \mapsto \sqrt{\cos x}$ **8)** $x \mapsto \frac{1}{\sin x}$ **9)** $x \mapsto \ln \frac{1}{\cos(x) - 1}$ **10)** $x \mapsto \frac{1}{\tan x}$
11) $x \mapsto \tan(x + 1)$ **12)** $x \mapsto \tan x^2$ **13)** $x \mapsto \tan e^x$

Réponses : **1)** $\mathbb{R}$ **2)** $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ **3)** $\mathbb{R} \setminus \{21\}$ **4)** $[-17, +\infty[$ **5)** $\mathbb{R}^*$

6) $[1, +\infty[$ **7)** $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{-\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right]$ **8)** $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ **9)** $\emptyset$ **10)** $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

11) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi - 1 \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ **12)** $\mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi} \mid k \in \mathbb{N} \right\}$ **13)** $\mathbb{R} \setminus \left\{ \ln \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) \mid k \in \mathbb{N} \right\}$

Exercice 7 : (ensemble d'arrivée) A l'aide des graphes des fonctions usuelles ou du cercle trigonométrique, déterminer les ensembles suivants : **1)** $\sin \left(\left[0, \frac{\pi}{2} \right] \right)$ **2)** $\cos \left(\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right] \right)$ **3)** $\tan \left(\left[\frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{4} \right] \right)$

Réponses :

1) $\sin\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [0, 1[$ 2) $\cos\left(\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]\right) = \left[-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ 3) $\tan\left(\left[\frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right]\right) = [-\sqrt{3}, 1]$

Exercice 8 : (*Petites transformations*) A l'aide des graphes des fonctions usuelles, représenter les fonctions suivantes :

1) $x \rightarrow e^{-x} + 1$ 2) $x \rightarrow \sqrt{x+1}$ 3) $x \rightarrow \ln \frac{1}{x}$ 4) $x \rightarrow \frac{-1}{x-1}$ 5) $x \rightarrow -|x+2| - 1$

Réponses : vérifiez vous-même en vous aidant de calculatrices.

Exercice 9 : 1) Représenter graphiquement les fonctions suivantes sur leur domaine de définition :

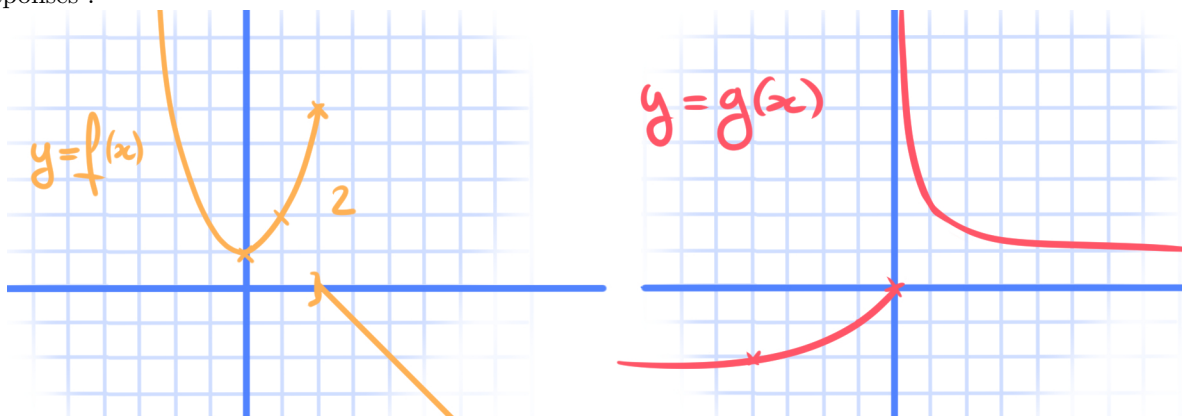
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} 2-x & \text{si } x \geq 2 \\ x^2+1 & \text{si } x < 2 \end{cases} \quad \text{et } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} 1+\frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

2) A l'aide du graphique, donner $f(\mathbb{R}_-)$ et $f(\mathbb{R}_+)$ ainsi que $g([0, 2])$, $g([1, +\infty[)$.

3) f est elle surjective? Injective? Déterminer deux intervalles I et J tels que $f: I \rightarrow J$ soit bijective.

4) g est elle surjective? Injective? Déterminer deux intervalles I et J tels que $g: I \rightarrow J$ soit bijective.

Réponses :



1)

2) $f(\mathbb{R}_-) = [1, +\infty[$ et $f(\mathbb{R}_+) =]-\infty, 0] \cup [1, 4]$.

On a $g([0, 2]) = \{0\} \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$ et $g([1, +\infty[) = [2, 1[$

3) f n'est pas injective car $f(-1) = f(1) = 2$ et elle n'est pas surjective car 0 n'admet pas d'antécédent par $f: [2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_-^*$ est bijective.

f . Il y a plusieurs moyens de rendre f bijective : $f: \mathbb{R}_- \rightarrow [1, +\infty[$ est bijective.

$f: [0, 2] \rightarrow [1, 5]$ est bijective.

4) g est injective car Si $g(x) = g(y)$ si $g(x) \leq 0$ alors on a $g(x) = -\sqrt{-x} = g(y) = -\sqrt{-y}$ d'où $x = y$. Si $g(x) > 0$ alors $g(x) = 1 + \frac{1}{x} = g(y) = 1 + \frac{1}{y}$ donc $x = y$. Donc g est injective. g n'est pas surjective car 1 n'admet pas d'antécédent par g . Il y a plusieurs moyens de rendre g bijective :

$g: \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}_-$ est bijective.

$g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow]1, +\infty[$ est bijective.

Exercice 10 : Soit $f: x \mapsto \sqrt{x^2 + x - 2}$

1) Donner le domaine de définition D_f de f .

2) Déterminer l'image de f , c'est à dire $f(D_f)$.

3) L'application f est elle injective sur D_f ?

Réponses : 1) On résout $x^2 + x - 2 \geq 0$. On a $\Delta = 9$, $x_1 = -2$ et $x_2 = -1$ donc c'est vrai pour tout $x \in]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$ donc $D_f =]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$.

2) On sait que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et le minimum de f est 0 car $f \geq 0$ et $f(1) = 0$ donc $f(D_f) = \mathbb{R}_+$.

3) f n'est pas injective car $f(-2) = f(1) = 0$

Exercice 11 : Soit $f : x \mapsto \frac{x^2 - 1}{2x - 1}$

1) Donner le domaine de définition D_f de f . 2) Déterminer l'image de f , c'est à dire $f(D_f)$.

3) L'application f est elle injective sur D_f est elle surjective à valeur dans $\mathbb{R}$?

Réponses : 1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

2) On fait une étude de la fonction f .

On a $f'(x) = \frac{2x(2x-1) - 2(x^2-1)}{(2x-1)^2} = \frac{4x^2 - 2x - 2x^2 + 2}{(2x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x + 2}{(2x-1)^2} = 2 \frac{x^2 - x + 1}{(2x-1)^2}$ On résout $x^2 - x + 1 \geq 0$: On a $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ Donc $f' > 0$ et f est strictement croissante sur son domaine de définition. On en déduit son tableau de variation :

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$-\infty \longrightarrow +\infty$		$-\infty \longrightarrow +\infty$

On voit donc que $f(D_f) = \mathbb{R}$.

Remarque : en étudiant les limites de f en $+\infty$ et en $\frac{1}{2}$ cela aurait suffi pour conclure.

3) D'après le tableau de variation, f est surjective mais pas injective.

Etude de fonction

Exercice 12 : (En 1 minute) Donner l'ensemble de définition, la parité et la période (si elles sont périodiques) des fonctions suivantes : 1) $x \rightarrow \cos(2x)$ 2) $x \rightarrow \sin \frac{x}{5}$ 3) $x \rightarrow \sin^2 x$ 4) $x \rightarrow x^2 + x^4$

5) $x \rightarrow \tan x^2$ 6) $x \rightarrow \frac{1}{x^{11}}$ 7) $x \rightarrow \cos \frac{1}{x}$ 8) $x \rightarrow \frac{\sin x}{\sin 3x}$ 9) $x \rightarrow \tan |x|$ 10) $x \rightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

11) $\ln \sqrt{1+x^2}$ 12) $\ln \frac{1+x}{1-x}$ 13) $x \rightarrow \frac{|x|}{x}$

Réponses : 1) $D_f = \mathbb{R}$, f est paire et π -périodique 2) $D_f = \mathbb{R}$, f est impaire et 10π -périodique

3) $D_f = \mathbb{R}$, f est paire et π -périodique 4) $D_f = \mathbb{R}$, f est paire

5) $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \sqrt{\frac{\pi}{2}} + k\pi \mid \pi \in \mathbb{N} \right\}$. f est paire et non périodique.

6) $D_f = \mathbb{R}^*$, f est impaire 7) $D_f = \mathbb{R}^*$, f est paire

8) $D_f = \mathbb{R}^*$ et f est paire et 2π périodique

9) $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid \pi \in \mathbb{Z} \right\}$ et f est paire, non périodique.

10) $D_f = \mathbb{R}$ et f est impaire. 11) $D_f = \mathbb{R}$ et f est paire

12) $D_f =]-1, 1[$ et f est impaire 13) $D_f = \mathbb{R}^*$ et f est paire.

Exercice 13 : (*Parité*) Etudier la parité des fonctions suivantes :

$$1) f(x) = \frac{e^{5x} - e^{-x}}{e^{4x} - 1} \quad 2) g(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \quad 3) h(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ -\sqrt{|x|} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Réponses : 1) $f(-x) = \frac{e^{-5x} - e^x}{e^{-4x} - 1} = \frac{1}{e^{-4x}} \frac{e^{-5x} - e^x}{1 - e^{4x}} = e^{4x} \frac{e^{-5x} - e^x}{1 - e^{4x}} = \frac{e^{-x} - e^{5x}}{1 - e^{4x}} = \frac{e^{5x} - e^{-x}}{e^{4x} - 1} = f(x)$

Donc f est paire.

2) $g(-x) = \ln(-x + \sqrt{1+x^2}) = \ln \frac{(-x + \sqrt{1+x^2})(x + \sqrt{1+x^2})}{x + \sqrt{1+x^2}} = \ln \frac{-x^2 + 1 + x^2}{x + \sqrt{1+x^2}} = \ln \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}$
 $= -\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = -g(x)$ Donc g est impaire.

3) $h(-x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si } -x \geq 0 \\ -\sqrt{|-x|} & \text{si } -x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ -\sqrt{|-x|} & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{|x|} & \text{si } x \leq 0 \\ -\sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{|x|} & \text{si } x < 0 \\ -\sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
 $= \begin{cases} -h(x) & \text{si } x < 0 \\ -h(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} = -h(x)$. Donc h est impaire.

Exercice 14 : (*Pour des inégalités*) A l'aide d'une étude de fonction, démontrer les inégalités suivantes :

1) $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$ 2) $\forall x \in \mathbb{R}_+, \sin x \leq x$ 3) $\forall x > 1, 1 - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$
4) $\forall x \in \mathbb{R}, \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ 5) $\forall x \in [0, 1], x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ 6) $\forall x \in \mathbb{R}_+, \sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$

Réponses : 1) On pose $f(x) = e^x - 1 - x$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $f'(x) = e^x - 1 \geq 0 \iff e^x \geq 1 \iff x \geq 0$. On en déduit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$e - 2$	$+\infty$

On a $e - 2 \geq 0$ donc on voit que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$ donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x}$

2) Comme $\sin x \in [-1, 1]$, on a $\forall x \geq 1, \sin x \leq 1 \leq x$ Donc c'est vérifié si $x \in [1, +\infty[$.

Maintenant pour $x \in [0, 1]$, posons $f(x) = \sin x - x$. On alors $f'(x) = \cos x - 1 \leq 0$. Donc f est décroissante et $\forall x \in [0, 1], f(x) \leq f(0) = 0$ Donc $f(x) \leq 0$

On a bien $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \sin x \leq x}$.

3) On pose $f(x) = \ln(1+x) - x$ et $g(x) = \ln(1+x) - 1 + \frac{x^2}{2}$ définies et dérivables sur $] -1, +\infty[$

On a $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$. Donc $f(x) \geq 0 \iff x \leq 0$

On a $g'(x) = \frac{1}{1+x} + x = \frac{1+x+x^2}{1+x}$. Donc $g(x) \geq 0 \iff 1+x+x^2 \geq 0$. Ici on a $\Delta = -3$ donc $g(x) \geq 0$ pour tout $x > -1$.

On en déduit les tableaux de variation :

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\searrow$	?

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

On a donc $\forall x > -1$, $f(x) \geq 0$ et $\forall x > 1$, $g(x) > g(1) = \ln(2) - \frac{1}{2} \geq 0$

Donc $\forall x > 1$, $1 - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

4) On pose $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ On a $f'(x) = -\sin x + x$.

On a montré pour la question 2) que $f'(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$, par ailleurs, comme f est paire, on en déduit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

On a donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geq 0$ et donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2}$.

5) On pose $f(x) = x(1-x) = x - x^2$. Comme f est un polynôme de degré 2 on sait qu'elle admet un maximum (car le coefficient dominant $a = -1$ est négatif) en $\frac{-b}{2a} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$.

Donc $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ donc $\forall x \in [0, 1]$, $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$

6) On pose $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$. On a f définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \geq 0$ d'après la question 4). Donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \geq 0$, $f(x) \geq f(0) = 0$

Donc $\forall x \geq 0$, $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$

Exercice 15 : (★★ - ★★★) Démontrer les inégalités suivantes :

1) $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $e^x \geq \frac{x^2}{2}$ 2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $e^x \geq \frac{x^n}{n!}$

Réponses : 1) $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et donc $f'(x) = e^x - x$ d'après la question 1) de l'ex 14 on a $f'(x) \geq 0$ (on peut prouver cela en faisant une étude de la fonction f'). Ainsi :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	1	$\nearrow$?

Donc $f(x) > 1$ sur $\mathbb{R}_+$ d'après le tableau. On obtient donc $e^x > \frac{x^2}{2}$.

2) Par récurrence. Initialisation : Si $n = 0$ on a bien $e^x \geq 1$ sur $\mathbb{R}_+$

Hérédité : SI c'est vrai au rang $n - 1$ alors $f(x) = e^x - \frac{x^n}{n!}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) =$

$e^x - \frac{nx^{n-1}}{n!} = e^x \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ On en déduit le tableau de variation de f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	1	?

Donc d'après ce tableau, $f \geq 1$ sur $\mathbb{R}_+$ donc $\forall x \geq 0, e^x \geq \frac{x^n}{n!}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, e^x \geq \frac{x^n}{n!}$

Exercice 16 : On souhaite déterminer la limite de la suite $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

1) Montrer que $\forall x > 0, \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$

2) En déduire un encadrement de $\frac{1}{x}$ pour $x > 1$.

3) En déduire la limite de u_n quand $n \rightarrow +\infty$.

Réponses : 1) On fait une étude de fonction.

On pose $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x) - \frac{1}{x+1}$ et $g(x) = \ln(x+1) - \ln(x) - \frac{1}{x}$. On a f et g définies et dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $x > 0$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+1) - (x+1)^2 + x}{x(x+1)^2} = \frac{x^2 + x - x^2 - 2x - 1 + x}{x(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2} \leq 0$$

$$\text{et } g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2(x+1)} \geq 0$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	?	0

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	?	0

On a bien $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et de même $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ Cela donne d'après les tableaux de

variation $f(x) \geq 0$ et $g(x) \leq 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ d'où le résultat : $\forall x > 0, \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$

2) On a $\forall x > 1, \ln x - \ln(x-1) \leq \frac{1}{x} \leq \ln(x+1) - \ln x$

3) On a l'encadrement suivant : $\sum_{k=n+1}^{2n} \ln k - \ln(k-1) \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \ln(k+1) - \ln k$

On reconnaît des sommes télescopiques, on a donc :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(2n) - \ln(n) \leq u_n \leq \ln(2n+1) - \ln(n+1)$ Cela donne $\ln 2 \leq u_n \leq \ln \frac{2n+1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln 2$

Donc $\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln 2}$ par encadrement.

Exercice 17 : (*Asymptotes*) Faire un tableau de variation et donner les asymptotes des fonctions suivantes :

1) $f : x \rightarrow \frac{x+2}{2x+1}$ 2) $f : x \rightarrow \frac{1+x^2}{1-x^2}$ 3) $f : x \mapsto \ln|\tan x|$ 4) $f : x \rightarrow x^{-\ln x}$

1) $f : x \rightarrow \frac{x+2}{2x+1}$ est définie et dérivable sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$.

On a $f'(x) = \frac{(2x+1) - 2(x+2)}{(2x+1)^2} = \frac{-3}{(2x+1)^2} \leq 0$. D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	$\frac{1}{2} \longrightarrow -\infty$		$+\infty \longrightarrow \frac{1}{2}$

f admet deux asymptotes : horizontale d'équation $\boxed{y = \frac{1}{2}}$ et verticale d'équation $\boxed{x = -\frac{1}{2}}$

2) $f : x \rightarrow \frac{1+x^2}{1-x^2}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Comme f est paire, on peut se contenter de l'étudier sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$.

On a $f(x) = \frac{2+(-1+x^2)}{1-x^2} = \frac{2}{1-x^2} - 1$ Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$1 \longrightarrow +\infty$		$-\infty \longrightarrow -1$

f admet donc les asymptotes verticales $\boxed{x = 1}$ et $\boxed{x = -1}$ (par parité) et horizontale $\boxed{y = -1}$

3) $f : x \mapsto \ln|\tan x|$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. La fonction étant paire et π -périodique, on peut simplement l'étudier sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. On a $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $f(x) = \ln \tan x$ donc f est (strictement) croissante.

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$		$-\infty \longrightarrow +\infty$

Les asymptotes sont donc les droites verticales d'équations $\boxed{x = \frac{k\pi}{2} \text{ où } k \in \mathbb{Z}}$.

4) $f : x \rightarrow x^{-\ln x}$.

On a $f(x) = e^{-(\ln x)^2}$ qui est définie et dérivable sur $D_f = \mathbb{R}_+^*$.

On a $f'(x) = \frac{-2 \ln x}{x} e^{-(\ln x)^2}$ donc $f'(x) > 0 \iff \ln x < 0 \iff x < 1$. Le tableau de variation est donc :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Remarque : on a $\ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$ donc $(\ln x)^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ et $-(\ln x)^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$.

Donc finalement $f(x) = e^{-(\ln x)^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$. f admet uniquement l'asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

Exercice 18 : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Etudier les variations des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \sum_{k=0}^n x^k$ 2) $f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k$ 3) $f(x) = \prod_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} k$ 4) $f(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \sum_{i=0}^k x^i$

.....
 1) f est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une somme de fonctions dérivables. On a $f(x) = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$ et

donc pour tout $x \neq 1$, on a $f'(x) = \frac{(n+1)x^{n+1}(x-1) - (x^{n+1} - 1)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$

Donc étudier le signe de f' revient à étudier le signe de $g(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$.

g est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = n(n+1)x^n - n(n+1)x^{n-1} = n(n+1)x^{n-1}(x-1)$.

Le signe de g' dépend de la parité de n :

Si n est pair :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x^{n-1}	$-$	0	$+$	$+$
$x-1$	$-$		0	$+$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	$+$

Donc les variations de g sont :

x	$-\infty$	α	0	1	$+\infty$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$				1		$+\infty$
	$-\infty$				0	

avec $\alpha < 0$ le seul réel tel que $g(\alpha) = 0$ qui existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

Si n est impair :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
x^{n-1}	$+$	0	$+$	$+$	
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$	
$g'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

Donc les variations de g sont :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2) On se ramène à la question précédente, en étudiant $f(-x)$. Par symétrie les tableaux de variations sont :

Si n est pair :

On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(-\alpha)$	$+\infty$

Si n est impair :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

3) C'est un peu plus bizarre, mais aussi plus simple que les deux questions précédentes.

On a en fait $f(x) = \prod_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} k = (\lfloor x \rfloor)!$. Or, si $m \geq n \in \mathbb{N}$, on a $m! \geq n!$ car $\frac{m!}{n!} = \prod_{k=n+1}^m k \geq 1$.

Ainsi en revenant à la définition de la monotonie,

on a $y > x \implies \lfloor y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor \implies (\lfloor y \rfloor)! \geq (\lfloor x \rfloor)! \implies f(x) \geq f(y)$.

Ainsi $\boxed{f \text{ est croissante}}$. (pas strictement car $f(0) = f(0,5) = 1$).

4) Déjà, remarquons que si $x < 0$, alors $\lfloor x \rfloor < 0 \implies f(x) = 0$ car la somme " $\sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor}$ " est vide.

Donc f est constante sur $\mathbb{R}_-$. Ça va nous ôter une sacré épine du pied.

Remarquons ensuite que si $x \in [0, 1[$, alors $f(x) = \sum_{k=0}^0 \sum_{i=0}^k x^i = \sum_{i=0}^0 x^i = x^0 = 1$ donc f est aussi constante sur $[0, 1[$.

Ensuite revenons à la définition de la monotonie pour étudier les variations de f .

Supposons $x, y \in [1, +\infty[$ tels que $y > x$.

Alors $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $y^i > x^i \implies \forall k \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{i=0}^k y^i > \sum_{i=0}^k x^i \implies \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \sum_{i=0}^k y^i > \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \sum_{i=0}^k x^i$ car $\lfloor x \rfloor \geq 1$.

Or par croissance de la partie entière, on a $\lfloor y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor \implies \sum_{k=0}^{\lfloor y \rfloor} \sum_{i=0}^k y^i \geq \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \sum_{i=0}^k y^i > \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \sum_{i=0}^k x^i$ car ce sont des sommes qui ne contiennent que des termes positifs. Ainsi $f(y) > f(x)$.

Conclusion $\boxed{f \text{ est croissant sur } \mathbb{R}}$.

Plus précisément $\boxed{f \text{ est constante sur } \mathbb{R}_-, \text{ constante sur } [0, 1[\text{ et strictement croissante sur } [1, +\infty[}$.
