

TD5 - Intégrales

1BCPST 2

Feuille d'exercice

Année 2024- 2025

Exercice 1 : ♡ : Calculer les intégrales suivantes :

- 1) $\int_0^1 x^2 \, dx$ 2) $\int_{-2}^2 x^{17} \, dx$ 3) $\int_{-1}^1 \tan x \, dx$ 4) $\int_0^\pi \cos(x) + \sin(x) \, dx$
5) $\int_0^1 5x^5 + 2x^4 - 3x^2 + 6x + 1 \, dx$ 6) $\int_0^1 2^x \, dx$ 7) $\int_0^n x^n \, dx$ 8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \, dx$ 9) $\int_0^5 |x-2| \, dx$
10) $\int_{-1}^\pi [x] \, dx$ 11) $\int_{-2}^3 \frac{|x|}{x} \, dx$

Exercice 2 : ★ - ★★ Calculer les intégrales suivantes :

- 1) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} \, dx$ 2) $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} \, dx$ 3) $\int_{-1}^0 \frac{x}{1+x^2} \, dx$ 4) $\int_0^2 (x+1)(x-2)^5 \, dx$ 5) $\int_0^1 \frac{x+5}{x^2+10x+17} \, dx$
6) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x+2}}} \, dx$ 7) $\int_{-1}^1 \frac{|x|}{\sqrt{x+2}} \, dx$ 8) $\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} \, dx$ 9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx$ 10) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) \sin(3x) \, dx$
11) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan x} \, dx$ 12) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x + \tan^3 x \, dx$ 13) $\int_0^{2\pi} \max(\cos x, \sin x) \, dx$ 14) $\int_0^{2\pi} \min(\cos x, \sin x) \, dx$

Exercice 3 : (*Calcul de primitive* ★ - ★★) Calculer une primitive pour les fonctions suivantes :

- 1) $f(x) = \ln \frac{1}{x}$ 2) Si $\alpha > 0$, $f(x) = \alpha^x$ 3) $f(x) = \sin^2(x)$ 4) $f(x) = xe^x$ 5) $f(x) = \arctan x$

Exercice 4 : (*IPP* ★ - ★★) Calculer les intégrales suivantes :

- 1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t \, dt$ 2) $\int_0^1 t^2 e^t \, dt$ 3) $\int_1^2 \frac{\ln t}{t} \, dt$ 4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos^2 t} \, dt$

Exercice 5 : (*Avec des fractions* ★★) Calculer les intégrales suivantes :

- 1) $\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} \, dx$ 2) $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2 - 4x + 3} \, dx$ 3) $\int_2^3 \frac{1}{x(x-1)^2} \, dx$ 4) $\int_1^2 \frac{1}{(x^2+1)x} \, dx$
5) $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \, dx$

Exercice 6 : (*Changement de variable* ★ - ★★ - ★★★) Calculer les intégrales suivantes :

- 1) $\int_e^x \frac{\ln(\ln t)}{t} \, dt$ 2) $\int_0^x e^{2t} \cos(e^t) \, dt$ 3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x \, dx$ 4) $\int_e^x \frac{\ln t \, dt}{t + t(\ln t)^2}$ 5) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \sin x} \, dx$

Exercice 7 : ★ On pose $C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} \, dt$ et $S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} \, dt$

- 1) Par un changement de variable montrer que $S = C$
2) En déduire la valeur de S et de C .

Exercice 8 : (*Intégrales et sommes* ★ - ★★) Calculer les intégrales suivantes :

- 1) $\int_0^1 \sum_{k=1}^n (k+1)x^k \, dx$ 2) $\sum_{k=1}^n \int_0^1 \frac{1}{x+k} \, dx$ 3) $\int_0^n \sum_{k=1}^n |x-k| \, dx$
4) Avec un calcul d'intégrales, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{n+1}$.

Exercice 9 : ★★ On pose $f(x) = \int_0^x t - [t] dt$

- 1) Dresser le tableau de variation de f .
- 2) Calculer $f(x)$ sur $[0, 1]$
- 3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, Calculer la valeur de $f(x+1) - f(x)$.
- 4) En déduire grossièrement le graphe de f .

Exercice 10 : ★★ On pose $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt$

- 1) Calculer $f'(x)$. Quel est son domaine de définition?
- 2) Quelle est la parité de f' ?
- 3) En déduire le tableau de variations de f sur $[-\pi, \pi]$.

Exercice 11 : (Intégrales de Wallis - ★★★) 1) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt$

- 2) A l'aide d'un changement de variable, montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt$