

TD - Intégrales Corrigé

1BCPST 2

Feuille d'exercice

Année 2022- 2023

Exercice 1 : (En 1 minute) : Calculer les intégrales suivantes :

- 1) $\int_0^1 x^2 \, dx$ 2) $\int_{-2}^2 x^{17} \, dx$ 3) $\int_{-1}^1 \tan x \, dx$ 4) $\int_0^\pi \cos(x) + \sin(x) \, dx$
 5) $\int_0^1 5x^5 + 2x^4 - 3x^2 + 6x + 1 \, dx$ 6) $\int_0^1 2^x \, dx$ 7) $\int_0^n x^n \, dx$ 8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \, dx$ 9) $\int_0^5 |x-2| \, dx$
 10) $\int_{-1}^\pi [x] \, dx$ 11) $\int_{-2}^3 \frac{|x|}{x} \, dx$

- Réponses : 1) $\int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}$ 2) $\int_{-2}^2 x^{17} \, dx = 0$ (fonction impaire) 3) $\int_{-1}^1 \tan x \, dx = 0$ (fonction impaire)
 4) $\int_0^\pi \cos(x) + \sin(x) \, dx = 2$ 5) $\int_0^1 5x^5 + 2x^4 - 3x^2 + 6x + 1 \, dx = \frac{5}{6} + \frac{2}{5} - \frac{3}{3} + \frac{6}{2} + 1 = \frac{127}{30}$
 6) $\int_0^1 2^x \, dx = \int_0^1 e^{x \ln 2} \, dx = \frac{1}{\ln 2}$ 7) $\int_0^n x^n \, dx = \frac{n^{n+1}}{n+1}$ 8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \, dx = [2\sqrt{\sin x}]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$
 9) $\int_0^5 |x-2| \, dx = \int_0^2 -x+2 \, dx + \int_2^5 x-2 \, dx = -2+4 + \frac{25}{2} - 2 - 6 = \boxed{\frac{13}{2}}$
 10) $\int_{-1}^\pi [x] \, dx = \int_{-1}^0 -1 \, dx + \int_0^1 0 \, dx + \int_1^2 1 \, dx + \int_2^3 2 \, dx + \int_3^\pi 3 \, dx = -1 + 0 + 1 + 2 + 3(\pi - 3) = \boxed{3\pi - 7}$
 11) $\int_{-2}^3 \frac{|x|}{x} \, dx = \int_{-2}^0 -1 \, dx + \int_0^3 1 \, dx = \boxed{1}$

- Exercice 2 :** Calculer les intégrales suivantes : 1) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} \, dx$ 2) $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} \, dx$ 3) $\int_{-1}^0 \frac{x}{1+x^2} \, dx$
 4) $\int_0^2 (x+1)(x-2)^5 \, dx$ 5) $\int_0^1 \frac{x+5}{x^2+10x+17} \, dx$ 6) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}} \, dx$ 7) $\int_{-1}^1 \frac{|x|}{\sqrt{x+2}} \, dx$
 8) $\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} \, dx$ 9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx$ 10) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) \sin(3x) \, dx$ 11) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan x} \, dx$
 12) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x + \tan^3 x \, dx$ 13) $\int_0^{2\pi} \max(\cos x, \sin x) \, dx$ 14) $\int_0^{2\pi} \min(\cos x, \sin x) \, dx$

- Réponses : 1) Attention à ne pas oublier les valeurs absolues : $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} \, dx = [\ln|x|]_{-2}^{-1} = \boxed{-\ln 2}$
 2) $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} \, dx = \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2} \, dx = \int_0^1 1 \, dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \, dx = 1 - [\arctan x]_0^1 = \boxed{1 - \frac{\pi}{4}}$
 3) $\int_{-1}^0 \frac{x}{1+x^2} \, dx = \left[\frac{1}{2} \ln|1+x^2| \right]_{-1}^0 = \boxed{\frac{\ln 2}{2}}$
 4) $\int_0^2 (x+1)(x-2)^5 \, dx = \int_0^2 (x-2+3)(x-2)^5 \, dx = \int_0^2 (x-2)^6 \, dx + \int_0^2 3(x-2)^5 \, dx$
 $= \left[\frac{(x-2)^7}{7} \right]_0^2 + 3 \cdot \left[\frac{(x-2)^6}{6} \right]_0^2 = \frac{-128}{7} + 3 \cdot \frac{64}{6} = \frac{-128}{7} + 32 = \boxed{\frac{96}{7}}$
 5) $\int_0^1 \frac{x+5}{x^2+10x+17} \, dx = \left[\frac{1}{2} \ln|x^2+10x+17| \right]_0^1 = \frac{\ln 28 - \ln 17}{2} = \boxed{\ln 2 + \frac{\ln 7 - \ln 17}{2}}$
 6) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}} \, dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+2})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})} \, dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{x+2-x} \, dx$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{x+2} - \sqrt{x} \, dx = \frac{1}{2} \left(\left[\frac{2}{3} (x+2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 - \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \right) = \frac{1}{3} \cdot \left(3^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}} + 1^{\frac{3}{2}} \right) = \boxed{\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3}}$$

$$7) \int_{-1}^1 \frac{|x|}{\sqrt{x+2}} \, dx = - \int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{x+2}} \, dx + \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+2}} \, dx$$

On va prendre à part cette intégrale : $\int_a^b \frac{x}{\sqrt{x+2}} \, dx = \int_a^b \frac{x+2-2}{\sqrt{x+2}} \, dx = \int_a^b \sqrt{x+2} \, dx + 2 \int_a^b \frac{1}{\sqrt{x+2}} \, dx$

$$= \left[\frac{2}{3} (x+2)^{\frac{3}{2}} \right]_a^b + \left[2(x+2)^{\frac{1}{2}} \right]_a^b = 2\sqrt{b+2} \left(\frac{b+5}{3} \right) - 2\sqrt{a+2} \left(\frac{a+5}{3} \right)$$

Reste à remplacer dans notre cas :

$$\int_{-1}^1 \frac{|x|}{\sqrt{x+2}} \, dx = -2\sqrt{2} \cdot \frac{5}{3} + 2\sqrt{1} \cdot \frac{4}{3} + 2\sqrt{3} \cdot 2 - 2\sqrt{2} \cdot \frac{5}{3} = \boxed{4\sqrt{3} + \frac{8-20\sqrt{2}}{3}}$$

$$8) \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} \, dx = \left[2\sqrt{\ln x} \right]_1^2 = \boxed{2\sqrt{\ln 2}}$$

9) On linéarise $\sin^3 x$ (voir TD sur les complexes).

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-1}{4} \sin(3x) + \frac{3}{4} \sin x \, dx = \frac{1}{12} [\cos 3x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{4} [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{-1}{12} + \frac{3}{4} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

10) Comme la question précédente, il faut linéariser l'expression. On a $\cos(2x) \sin(3x) = \frac{1}{2} (\sin 5x - \sin x)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) \sin(3x) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 5x - \sin x \, dx = \frac{-1}{10} \left[\cos 5x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \left[\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{10} - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{-2}{5}}$$

$$11) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan x} \, dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \left[\ln |\sin x| \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \ln \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2} \ln 3}$$

$$12) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x + \tan^3 x \, dx = \left[\frac{1}{2} \tan^2 x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

13) Avec un cercle trigo, on observe que $\sin x \geq \cos x \iff x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right]$ (modulo 2π) donc :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \max(\cos x, \sin x) \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin x \, dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} \cos x \, dx = \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left[\cos x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} + \left[\sin x \right]_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$14) \text{ On a } \int_0^{2\pi} \max(\cos x, \sin x) + \min(\cos x, \sin x) \, dx = \int_0^{2\pi} \cos x + \sin x \, dx = 0$$

$$\text{Donc } \int_0^{2\pi} \min(\cos x, \sin x) \, dx = - \int_0^{2\pi} \max(\cos x, \sin x) \, dx = \boxed{-\sqrt{2}}$$

Exercice 3 : (Calcul de primitive) Calculer une primitive pour les fonctions suivantes :

1) $f(x) = \ln \frac{1}{x}$ 2) Si $\alpha > 0$, $f(x) = \alpha^x$ 3) $f(x) = \sin^2(x)$ 4) $f(x) = xe^x$ 5) $f(x) = \arctan x$

Réponses : 1) On a $f(x) = -\ln x$ donc une primitive est $\boxed{F(x) = -x \ln x + x}$

2) On a $f(x) = e^{x \ln \alpha}$ donc une primitive est $F(x) = \frac{1}{\ln \alpha} e^{x \ln \alpha}$. Soit $\boxed{F(x) = \frac{\alpha^x}{\ln \alpha}}$

3) On sait que $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ donc $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$. On en déduit une primitive :

$$\boxed{F(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x}$$

4) On calcule $F(x) = \int_0^x te^t \, dt = \left[te^t \right]_0^x - \int_0^x e^t \, dt = xe^x - \left[e^t \right]_0^x = xe^x - e^x + 1$.

A une constante près, on peut donc choisir une primitive $\boxed{F(x) = (x-1)e^x}$.

5) $F(x) = \int_0^x \arctan t \, dt = \left[t \arctan t \right]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2} \, dt = x \arctan x - \left[\frac{1}{2} \ln(1+t^2) \right]_0^x = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$ On a donc une primitive $F(x) = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$

Exercice 4 : (IPP) Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t \, dt$ 2) $\int_0^1 t^2 e^t \, dt$ 3) $\int_1^2 \frac{\ln t}{t} \, dt$ 4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos^2 t} \, dt$

.....

Réponses : 1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t \, dt = \left[t \sin t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt = \frac{\pi}{2} + \left[\cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{\pi}{2} + 1}$

2) $\int_0^1 t^2 e^t \, dt = \left[t^2 e^t \right]_0^1 - \int_0^1 2te^t \, dt = e - 2 \left(\left[te^t \right]_0^1 - \int_0^1 e^t \, dt \right) = e - 2 \left(e - \left[e^t \right]_0^1 \right) = \boxed{e - 2}$

3) Ce n'est pas une IPP... $\int_1^2 \frac{\ln t}{t} \, dt = \left[\frac{1}{2} (\ln t)^2 \right]_1^2 = \boxed{\frac{(\ln 2)^2}{2}}$

4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos^2 t} \, dt = \left[t \tan t \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t \, dt = \frac{\pi}{4} - \left[-\ln|\cos t| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2}$

Exercice 5 : (Avec des fractions) Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} \, dx$ 2) $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2-3x+2} \, dx$ 3) $\int_1^2 \frac{1}{x(x-1)^2} \, dx$ 4) $\int_1^2 \frac{1}{(x^2+1)x} \, dx$

5) $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2+2x+2} \, dx$

.....

Réponses : 1) On a $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ donc $\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} \, dx = \left[\ln x \right]_1^2 - \left[\ln(x+1) \right]_1^2 = \boxed{2 \ln 2 - \ln 3}$

2) On a $\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$.

Donc $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2-3x+2} \, dx = \left[\ln|x-2| \right]_{-1}^0 - \left[\ln|x-1| \right]_{-1}^0 = \boxed{2 \ln 2 - \ln 3}$

3) $\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x}$

Donc : $\int_2^3 \frac{1}{x(x-1)^2} \, dx = \left[\frac{1}{x-1} \right]_2^3 - \left[\ln(x-1) \right]_2^3 + \left[\ln x \right]_2^3 = \boxed{\frac{-1}{2} - 2 \ln 2 + \ln 3}$

4) On a $\frac{1}{(x^2+1)x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$ donc :

$\int_1^2 \frac{1}{(x^2+1)x} \, dx = \left[\ln x \right]_1^2 - \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_1^2 = \boxed{\frac{3}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 5}$

5) On a $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$ donc

$\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2+2x+2} \, dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{(x+1)^2+1} \, dx = \left[\arctan(x+1) \right]_{-1}^0 = \arctan(1) - \arctan(0) = \boxed{\frac{\pi}{4}}$

Exercice 6 : (Changement de variable) Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_e^x \frac{\ln(\ln t)}{t} \, dt$ 2) $\int_0^x e^{2t} \cos(e^t) \, dt$ 3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x \, dx$ 4) $\int_e^x \frac{\ln t \, dt}{t+t(\ln t)^2}$ 5) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\sin x} \, dx$

.....

Réponses : 1) $\int_e^x \frac{\ln(\ln t)}{t} dt$. On pose $u = \ln t$ ainsi $dt = e^u du$
et $\int_e^x \frac{\ln(\ln t)}{t} dt = \int_1^{\ln x} \frac{\ln u}{e^u} e^u du = \int_1^{\ln x} \ln u du = \left[u \ln u - u \right]_1^{\ln x} = \boxed{\ln x (\ln(\ln x) - 1) + 1}$.

2) $\int_0^x e^{2t} \cos(e^t) dt$. On pose $u = e^t$ ainsi $dt = \frac{1}{u} du$ et $\int_0^x e^{2t} \cos(e^t) dt = \int_1^{e^x} u^2 \cos u \frac{du}{u} = \int_1^{e^x} u \cos u du =$
 $\left[u \sin u \right]_1^{e^x} - \int_1^{e^x} \sin u du = e^x \sin e^x - \sin 1 + \left[\cos u \right]_1^{e^x} = \boxed{e^x \sin e^x + \cos e^x - \sin 1 - \cos 1}$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x dx$. On pose $u = \tan x$ et ainsi $dx = \frac{du}{1+u^2}$
 $\int_0^1 \frac{u^4}{1+u^2} du = \int_0^1 \frac{u^4-1}{1+u^2} du + \int_0^1 \frac{1}{1+u^2} du = \int_0^1 \frac{(u^2-1)(u^2+1)}{1+u^2} du + \left[\arctan u \right]_0^1$
 $= \int_0^1 u^2 - 1 du + \frac{\pi}{4} = \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{-2}{3} + \frac{\pi}{4}}$

4) $\int_e^x \frac{\ln t dt}{t + t(\ln t)^2}$ On pose $u = \ln t$ et ainsi $dt = e^u du$ On a :
 $\int_e^x \frac{\ln t dt}{t + t(\ln t)^2} = \int_1^{\ln x} \frac{ue^u du}{e^u + e^u u^2} = \int_1^{\ln x} \frac{u du}{1 + u^2} = \frac{1}{2} \left[\ln|1 + u^2| \right]_1^{\ln x} = \boxed{\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \ln^2 x}{2} \right)}$

5) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \sin x} dx$ On pose $u = \sin x$ et ainsi $dx = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} du$
 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \sin x} dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{\frac{1+u}{1-u^2}} du = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u}} du = \left[-2\sqrt{1-u} \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -2\sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} + 2$
 $= \boxed{2 - \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}$

Exercice 7 : (Intégrales et sommes) Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_0^1 \sum_{i=1}^n (i+1)x^i dx$ 2) $\sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{1}{x+i} dx$ 3) $\int_0^n \sum_{i=1}^n |x-i| dx$
4) Avec un calcul d'intégrales, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{n+1}$.
.....

Réponses : 1) $\int_0^1 \sum_{i=1}^n (i+1)x^i dx = \sum_{i=1}^n \int_0^1 (i+1)x^i dx = \sum_{i=1}^n \left[x^{i+1} \right]_0^1 = \sum_{i=1}^n 1 = \boxed{n}$

2) $\sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{1}{x+i} dx = \sum_{i=1}^n \left[\ln(x+i) \right]_0^1 = \sum_{i=1}^n \ln(i+1) - \ln i = \boxed{\ln(n+1)}$

3) $\int_0^n \sum_{i=1}^n |x-i| dx = \sum_{i=1}^n \int_0^n |x-i| dx = \sum_{i=1}^n \int_0^i i-x dx + \int_i^n x-i dx = \sum_{i=1}^n i^2 - \frac{i^2}{2} + \frac{n^2}{2} - \frac{i^2}{2} - (n-i)i$
 $= \sum_{i=1}^n i^2 - ni + \frac{n^2}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n^3}{2} = \boxed{\frac{n(2n^2+1)}{6}}$

4) On part du binôme de Newton : $(1+t)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{k} t^k$ et on intègre les deux membres entre 0 et x . On a
 $\int_0^x (1+t)^n dt = \left[\frac{(1+t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^x = \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{n+1}$. D'autre part :
 $\int_0^x \sum_{i=0}^n \binom{n}{k} t^k dt = \sum_{i=0}^n \int_0^x \binom{n}{k} t^k dt = \sum_{i=0}^n \binom{n}{k} \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^x = \boxed{\sum_{i=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1}}$.

Exercice 8 : On pose $C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt$ et $S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} dt$

1) Par un changement de variable montrer que $S = C$

2) En déduire la valeur de S et de C .

.....

Réponses :

1) On pose $u = \frac{\pi}{2} - t$. On a alors $C = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - u)}{\sin(\frac{\pi}{2} - u) + \cos(\frac{\pi}{2} - u)} (-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{\sin u + \cos u} du = S$

2) On remarque que $C + S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t + \sin t}{\sin t + \cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2}$

Comme $S = C$ on a donc $S + C = 2C = \frac{\pi}{2}$. On en déduit $C = S = \frac{\pi}{4}$

Exercice 9 : On pose $f(x) = \int_0^x t - [t] dt$

1) Dresser le tableau de variation de f .

2) Calculer $f(x)$ sur $[0, 1]$

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, Calculer la valeur de $f(x+1) - f(x)$.

4) En déduire grossièrement le graphe de f .

.....

Réponses :

1) On a f dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = x - [x] \geq 0$. Donc f est strictement croissante.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		

2) On si $x \in [0, 1]$ et $t \in [0, x[$ alors $[t] = 0$ donc $f(x) = \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2}$ si $x \in [0, 1]$.

3) On a $f(x+1) - f(x) = \int_0^{x+1} t - [t] dt - \int_0^x t - [t] dt = \int_x^{x+1} t - [t] dt$.

En posant $u = t - x$ on a :

$$\int_x^{x+1} t - [t] dt = \int_0^1 u + x - [u + x] du = \int_0^1 u du + x + \int_0^1 [u + x] du = \frac{1}{2} + x + \int_0^1 [u + x] du$$

Comme $u \in [0, 1]$, on a $[x + u] = [x] \iff x + u < [x] + 1 \iff u < [x] + 1 - x$

et $[x + u] = [x] + 1 \iff u \geq [x] + 1 - x$. On a donc :

$$\int_0^1 [u + x] du = \int_0^{[x] + 1 - x} [x] du + \int_{[x] + 1 - x}^1 [x] + 1 du = \int_0^1 [x] du + \int_{[x] + 1 - x}^1 1 du = [x] + (1 - [x] - 1 + x) = x$$

Finalement on a donc $f(x+1) - f(x) = 2x + \frac{1}{2}$

4)

Exercice 10 : On pose $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt$

1) Quel est son domaine de définition, son domaine de dérivabilité? Calculer f' .

2) Etudier la parité de f .

3) Dresser le tableau de variations de f sur $[-\pi, \pi]$.

.....

Réponses :

1) $x \rightarrow \frac{\sin x}{x}$ est définie sur $[x, 2x]$ pour tout $x \neq 0$ donc f est clairement définie sur $\mathbb{R}^*$. Il semble cependant que f ne soit pas définie en 0, même si on pourrait imaginer assez facilement avoir $f(0) = 0$ car c'est une intégrale vide (f est en fait prolongeable par continuité en 0.) On retient donc $D_f = \mathbb{R}^*$.

$$f(x) = \int_1^{2x} \frac{\sin t}{t} dt + \int_x^1 \frac{\sin t}{t} dt. \text{ Si } F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt \text{ alors } F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^* \text{ et } F'(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Or $f(x) = F(2x) - F(x)$ Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$f'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = 2 \frac{\sin 2x}{2x} - \frac{\sin x}{x} = \frac{(2 \cos x - 1) \sin x}{x}.$$

2) $f(-x) = \int_x^{-2x} \frac{\sin t}{t} dt = \underbrace{\int_x^{2x} \frac{\sin(-u)}{-u} (-du)}_{\text{On pose } u=-t} = - \int_x^{2x} \frac{\sin u}{u} du = -f(x)$ Donc f est impaire.

3) Comme f est impaire, on ne l'étudie que sur $]0, \pi]$. On a :

$$f'(x) \geq 0 \iff 2 \cos x - 1 \geq 0 \iff \cos x \geq \frac{1}{2} \iff x \in \left] 0, \frac{\pi}{3} \right] \text{ On en déduit les variations de } f :$$

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f'(x)$		+	-
$f(x)$			

Exercice 11 : (Intégrales de Wallis) 1) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$

2) A l'aide d'un changement de variable, montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$

Réponses : Attention, l'exercice est compliqué.

1) On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt = \left[-\cos t \sin^{n-1} t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^{n-2} t dt = 0 + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t) \sin^{n-2} t dt = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} t dt - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$

On en déduit $nI_n = (n-1)I_{n-2} \iff I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. On peut donc distinguer les cas pairs et impairs :

Pour n pair : $I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{(2p-1)(2p-3)}{2p(2p-2)} I_{2p-4} = \frac{(2p-1)(2p-3) \times \dots \times 3 \times 1}{2p(2p-2) \times \dots \times 2} I_0 = \frac{(2p-1)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2}$

et n impair : $I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \frac{2p(2p-2)}{(2p+1)(2p-1)} I_{2p-3} = \dots = \frac{2p(2p-2) \times \dots \times 2}{(2p+1)(2p-1) \times \dots \times 3} I_1 = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$

car $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = \left[-\cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$. On a donc en conclusion : $I_{2p} = \frac{(2p-1)! \pi}{2^{2p+1}(p!)^2}$ et $I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$

2) On pose $u = \frac{\pi}{2} - t$. On a alors $dt = -du$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n \left(\frac{\pi}{2} - u \right) (-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n u du$.